Université Hassan II-Mohammedia-Casablanca / Université Moulay Ismail

**Concours d'accès en 1ère année des années préparatoires**

ENSAM-Casablanca - ENSAM-Meknès

*Séries: sciences expérimentales et branches techniques*



## Épreuve de Mathématique

Samedi 02 Août 2014- Durée 2h00

### I - QUESTIONS À RÉPONSES PRÉCISES

*Une réponse correcte = **2pt**, pas de réponse **ou** une réponse fausse = **0pt***

| | Questions | Réponses | Notes |
|---|---|---|---|
| Q1 2pt | Calculer la limite de la suite $(u_n)_n$ définie par: $$u_n=\sum_{k=1}^{n} e^{\left(\frac{k}{n^2}\right)}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$ | $\lim_{n} u_n =$ | |
| Q2 2pt | Résoudre, dans $[0,2\pi]^2$, le système: $$\begin{cases}\sqrt{2}\cos x-\cos x\cos y=\frac{1}{2}\\ \sin x+\cos y=\sqrt{2}\end{cases}$$ | $S =$ | |
| Q3 2pt | Déterminer la forme algébrique de: $$z=\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}-i\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{42}$$ | $z =$ | |
| Q4 2pt | Déterminer, $\Gamma$, l'ensemble des points du plan complexe dont les affixes $z$ vérifient: $$(iz+1)(z+i-1)\in i\mathbb{R}$$ | $\Gamma$ est .................. | |
| Q5 2pt | Soit $a\in\,]0,\pi[$. Calculer $$D=\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$$ | $D =$ | |
| Q6 2pt | Calculer: $$A_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$$ | $A_n =$ | |
| Q7 2pt | Soit $f$ une fonction positive sur son domaine de définition et dérivable en $a>0$. Déterminer $$\ell=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{\ln x-\ln a}}$$ | $\ell =$ | |
| Q8 2pt | Calculer la limite $$\jmath=\lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{x\sin(\sin x)}$$ | $\jmath =$ | |
| Q9 2pt | Trouver toutes les applications $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ telles que: $$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ f(x)+3f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2$$ | $f(x) =$ | |
| Q10 2pt | Soit $g$ la fonction définie par $$\forall x\in\,]0,\pi[\quad g(x)=\lvert\cos x\rvert\sqrt{1-\cos x}$$ Calculer $g'(x)$ en fonction $g(x)$, $\forall x\in\,]0,\pi[\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ | $g'(x) =....$ | |
| Q11 2pt | Soit $h$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h(x)=\ln\lvert e^x-e^{2x}\rvert$. Déterminer $h^{-1}$. | $\forall x\in D_{h^{-1}}=$................., <br> $h^{-1}(x)=....$ | |
| Q12 2pt | Calculer: $I=\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$ | $I =$ | |
| Q13 2pt | Calculer $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx$ | $J =$ | |
| Q14 2pt | Résoudre l'équation différentielle $$y''+2y'+10y=\sin 3x,\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}y(t)dt=0,\ y'(\pi)=\frac{6}{37}$$ | $y(x) =$ | |
| Q15 2pt | Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $3^x+4^x=5^x$ | $S=$ | |

## II - QUESTIONS À CHOIX MULTIPLES

*Une réponse correcte = 2pt, pas de réponse = 0pt, plus d'une réponse ou une réponse fausse = -1pt.*

Notes

**Q16:** Pour quelles valeurs de $m$ le système $\begin{cases} -X - Y - 2mZ = 1 \\ X + (1-m)Y + Z = 2 \\ 2X + 3Y + mZ = 3 \end{cases}$ admet une solution unique:

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| -1 et un nombre négatif | uniquement -1 | -1 et un nombre positif | -1 et $^1/_2$ |

**Q17:** Sur $[0, +\infty[$, la fonction $f$ définie par $f(x) = |x| + \ln(x+1)$ est:

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| toujours positive | toujours négative | négative puis positive | positive puis négative |

**Q18:** Soit $f$ définie par $f(0) = \frac{1}{e}$, $f(e) = 0$ et $f(x) = e^{\left(\frac{1+\ln x}{1-\ln x}\right)}$. Alors sa courbe $C_f$ admet:

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| une asymptote oblique en $+\infty$ | en $x = e$ une demi tangente à gauche | en $x = e$ une demi tangente à droite verticale | aucunes des trois réponses |

**Q19:** Dans une boite se trouvent 14 jetons portant chacun une lettre du nom "SAHARA MAROCAIN". On tire successivement et sans remise 5 jetons. Quelle est la probabilité pour que l'on tire les lettres du nom " SMARA" dans un ordre quelconque?

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{6006}$ | $\frac{10}{1001}$ | $\frac{50}{14^5}$ | aucunes des trois réponses |

**Q20:** Une boite $B_1$ contient 2 jetons numérotés: 1 , 3. Une boite $B_2$ contient 2 jetons numérotés: 2 , 2. Une boite $B_3$ contient 2 jetons numérotés :1 , 0. On tire au hasard un jeton $a$ de $B_1$, un jeton $b$ de $B_2$, un jeton $c$ de $B_3$. Quelle est la probabilité pour que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet des racines réelles?

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| 0,5 | 0,25 | 0,75 | 1 |

**Q21:** Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les deux points $A(-1,1,1)$ et $B(7,-5,5)$. Soit $S$ la sphère dont l'un des diamètre est le segment $[AB]$. Le plan tangent à $S$ au point $C(1,1-1)$ est:

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| $2x - 3y + 4z + 5 = 0$ | $4x + 3y + 2z - 5 = 0$ | $2x + 2y - z - 5 = 0$ | $4x + 2y + 2z - 5 = 0$ |

**Q22:** Soit $(u_n)_n$ la suite de terme général $u_n = \int_n^{n+1} e^{\left(\frac{x}{n}\right)} dx$. Alors

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ | $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ | $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ | $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$ |

**Q23:** Sur $\mathbb{R}^*$, La fonction $f(x) = \ln\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$ admet :

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| Un maximum local | Deux maximums locaux | Un minimum local | Deux minimums locaux |

**Q24:** Combien l'équation $\tan x + \tan 2x + \tan 3x + \tan 4x = 0$ possède-t-elle de solutions dans $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ ?

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| Cinq solutions | Six solutions | Sept solutions | Plus que sept solutions |

**Q25:**

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2^k \pi}{2^n - 1}\right) =$$

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | $+\infty$ | cette limite n'existe pas |

Université Hassan II-Mohammedia-Casablanca / Université Moulay Ismail

**Concours d'accès en 1ère année des années préparatoires**

ENSAM-Casablanca - ENSAM-Meknès

*Séries: sciences expérimentales et branches techniques*

## Épreuve de Mathématique

Samedi 02 Août 2014- Durée 2h00

### I - QUESTIONS À RÉPONSES PRÉCISES

*Une réponse correcte = **2pt**, pas de réponse ou une réponse fausse = **0pt***

| | Questions | Réponses | Notes |
|---|---|---|---|
| Q1 / 2pt | Calculer la limite de la suite $(u_n)_n$ définie par: $$u_n=\sum_{k=1}^{n} e^{\left(\frac{k}{n^2}\right)}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$ | $\lim\limits_{n} u_n =$ | |
| Q2 / 2pt | Résoudre, dans $[0,2\pi]^2$, le système: $$\begin{cases}\sqrt{2}\cos x-\cos x\cos y=\frac{1}{2}\\ \sin x+\cos y=\sqrt{2}\end{cases}$$ | $S=\left(\frac{\pi}{4},\frac{-\pi}{4}\right)$ et $S=\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ | |
| Q3 / 2pt | Déterminer la forme algébrique de: $$z=\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}-i\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{42}$$ | $z=1$ | |
| Q4 / 2pt | Déterminer, $\Gamma$, l'ensemble des points du plan complexe dont les affixes $z$ vérifient: $(iz+1)(z+i-1)\in i\mathbb{R}$ | $\Gamma$ est $y=\frac{1}{1-2x}$ | |
| Q5 / 2pt | Soit $a\in\,]0,\pi[$. Calculer $$D=\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$$ | $D=\frac{\sin a}{2^n\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}$ | |
| Q6 / 2pt | Calculer: $$A_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$$ | $A_n=1-\frac{1}{(n+1)!}$ | |
| Q7 / 2pt | Soit $f$ une fonction positive sur son domaine de définition et dérivable en $a>0$. Déterminer $$\ell=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{\ln x-\ln a}}$$ | $\ell=\frac{1}{2}$ | |
| Q8 / 2pt | Calculer la limite $$j=\lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{x\sin(\sin x)}$$ | $j=\frac{1}{12}$ | |
| Q9 / 2pt | Trouver toutes les applications $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ telles que: $$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ f(x)+3f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2$$ | $f(x)=$ | |
| Q10 / 2pt | Soit $g$ la fonction définie par $\forall x\in\,]0,\pi[\quad g(x)=\lvert\cos x\rvert\sqrt{1-\cos x}$ Calculer $g'(x)$ en fonction $g(x)$, $\forall x\in\,]0,\pi[\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ | $g'(x)=$.... | |
| Q11 / 2pt | Soit $h$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h(x)=\ln\lvert e^x-e^{2x}\rvert$ Déterminer $h^{-1}$. | $\forall x\in D_{h^{-1}}=$................, <br> $h^{-1}(x)=$.... | |
| Q12 / 2pt | Calculer: $I=\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$ | $I=$ | |
| Q13 / 2pt | Calculer $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx$ | $J=$ | |
| Q14 / 2pt | Résoudre l'équation différentielle $y''+2y'+10y=\sin 3x,\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}y(t)dt=0,y'(\pi)=\frac{6}{37}$ | $y(x)=(K_1\cos 3x+K_2\sin 3x)e^{-x}+\frac{1}{6}\sin 3x+\frac{1}{36}\cos 3x$ | |
| Q15 / 2pt | Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $3^x+4^x=5^x$ | $S=$ | |

## II - QUESTIONS À CHOIX MULTIPLES

*Une réponse correcte = **2pt**, pas de réponse = **0pt**, plus d'une réponse ou une réponse fausse = **-1pt**.*

Notes

**Q16:** Pour quelles valeurs de $m$ le système $\begin{cases} -X - Y - 2mZ = 1 \\ X + (1-m)Y + Z = 2 \\ 2X + 3Y + mZ = 3 \end{cases}$ admet une solution unique:

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| -1 et un nombre négatif | uniquement -1 | -1 et un nombre positif | -1 et $^1/_2$ |

**Q17:** Sur $[0, +\infty[$, la fonction $f$ définie par $f(x) = |x| + \ln(x+1)$ est:

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| ☒ toujours positive | toujours négative | négative puis positive | positive puis négative |

**Q18:** Soit $f$ définie par $f(0) = \frac{1}{e}$, $f(e) = 0$ et $f(x) = e^{\left(\frac{1+\ln x}{1-\ln x}\right)}$. Alors sa courbe $C_f$ admet:

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| une asymptote oblique en $+\infty$ | en $x = e$ une demi tangente à gauche | ☒ en $x = e$ une demi tangente à droite verticale | aucunes des trois réponses |

**Q19:** Dans une boite se trouvent 14 jetons portant chacun une lettre du nom "SAHARA MAROCAIN". On tire successivement et sans remise 5 jetons. Quelle est la probabilité pour que l'on tire les lettres du nom " SMARA" dans un ordre quelconque?

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{6006}$ | ☒ $\frac{10}{1001}$ | $\frac{50}{14^5}$ | aucunes des trois réponses |

**Q20:** Une boite $\mathbf{B_1}$ contient 2 jetons numérotés: 1 , 3. Une boite $\mathbf{B_2}$ contient 2 jetons numérotés: 2 , 2. Une boite $\mathbf{B_3}$ contient 2 jetons numérotés :1 , 0. On tire au hasard un jeton $a$ de $\mathbf{B_1}$, un jeton $b$ de $\mathbf{B_2}$, un jeton $c$ de $\mathbf{B_3}$. Quelle est la probabilité pour que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet des racines réelles?

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| 0,5 | 0,25 | ☒ 0,75 | 1 |

**Q21:** Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les deux points $A(-1,1,1)$ et $B(7,-5,5)$. Soit $\boldsymbol{S}$ la sphère dont l'un des diamètre est le segment $[AB]$. Le plan tangent à $S$ au point $C(1,1-1)$ est:

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| ☒ $2x - 3y + 4z + 5 = 0$ | $4x + 3y + 2z - 5 = 0$ | $2x + 2y - z - 5 = 0$ | $4x + 2y + 2z - 5 = 0$ |

**Q22:** Soit $(u_n)_n$ la suite de terme général $u_n = \int_n^{n+1} e^{\left(\frac{x}{n}\right)} dx$. Alors

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ | $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ | $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ | $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$ |

**Q23:** Sur $\mathbb{R}^*$, La fonction $f(x) = \ln\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$ admet :

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| Un maximum local | Deux maximums locaux | Un minimum local | Deux minimums locaux |

**Q24:** Combien l'équation $\tan x + \tan 2x + \tan 3x + \tan 4x = 0$ possède-t-elle de solutions dans $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ ?

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| Cinq solutions | Six solutions | Sept solutions | ☒ Plus que sept solutions |

**Q25:**

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2^k \pi}{2^n - 1}\right) =$$

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| 0 | ☒ 1 | $+\infty$ | cette limite n'existe pas |