ENSA

Concours d'accès en 1ère année des ENSA Maroc

Juillet 2018

Epreuve de Mathématiques **Durée : 1H30 min**

Calculatrices, téléphones et tous types de documents non autorisés

Q1. (u_n) *une suite réelle.*

$$Si \quad \lim_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=2 \ , \ alors \ \lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n}=$$

A) 0	*B)* 1	*C)* $+\infty$	*D)* 2

Q2.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin^2 n-\cos^3 n}{n}=$$

A) 0	*B)* 1	*C)* $-\infty$	*D)* $+\infty$

Q3.

$$\lim_{x\to1^+} \ln x . \ln(\ln x)=$$

A) 1	*B)* 0	*C)* $+\infty$	*D)* $-\infty$

Q4. *Soit* (u_n) *la suite définie sur* $\mathbb{N}^*$ *par :*

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

A) $u_{2n}-u_n\geq\frac{1}{2}$	*B)* $u_{2n}-u_n\leq\frac{1}{4}$	*C)* $u_{2n}-u_n<\frac{1}{3}$	*D)* $u_{2n}-u_n<\frac{1}{2}$

Q5. *Pour la même suite que Q4. On a :*

A) $u_{2^{10}}\geq 6$	*B)* $u_{2^{10}}<6$	*C)* $u_{2^{10}}=3$	*D)* $u_{2^{10}}<5.$

[redacted]

Q6.

$$\cos(Arctan\, x) =$$

A) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	B) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	C) $\frac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$	D) $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Q7. *Soit*

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue en* 0 *telle que* $\forall\, x \in IR \quad f(2x) = f(x)$ *Alors* f *est :*

A) Constante	B) Strictement croissante	C) Strictement décroissante	D) périodique de période 2

Q8.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable en* $a \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a} =$$

A) $f'(a)$	B) $f(a) + af'(a)$	C) $f(a) - f'(a)$	D) $f(a) - af'(a)$

Q9.

$$\int_0^1 \frac{x^4}{x^2+1}\, dx =$$

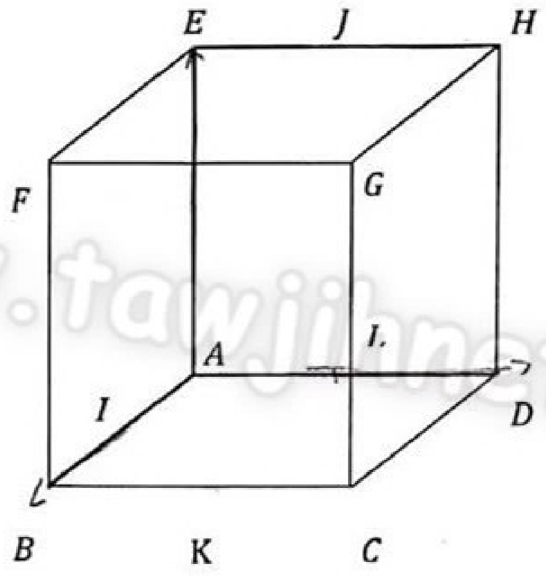
A) $\frac{\pi}{4}$	B) $\frac{2}{3}$	C) $\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$	D) $\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}$

Q10.

$$\int_0^{\sqrt{3}} x^2 \ln(x^2+1)\, dx =$$

A) $\sqrt{3}\ln 2 - \frac{\pi}{9}$	B) $\sqrt{3}\ln 2 + \frac{\pi}{9}$	C) $2\left(\sqrt{3}\ln 2 - \frac{\pi}{9}\right)$	D) $\sqrt{3}\ln 2$

Exercice 1 : *On considère le cube $ABCDEFGH$ et on note $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ un repère orthonormé de l'espace.*



Q11. *Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{FD}$ sont*

A) $(1,1,1)$	B) $(-1,1,1)$	C) $(-1,1,-1)$	D) $(1,1,0)$

Q12. *Une représentation paramétrique de la droite (FD) est*

A) $\begin{cases} x = t \\ y = t+1, \\ z = -t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$	B) $\begin{cases} x = -t \\ y = -t+1, \\ z = -t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$	C) $\begin{cases} x = -t \\ y = t+1, \\ z = -t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$	D) $\begin{cases} x = t \\ y = t+1, \\ z = +t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

Q13. *On note I le milieu du segment $[AB]$, J le milieu du segment $[EH]$ et K le milieu du segment $[BC]$. La droite (FD)*

A) est orthogonale au plan (IJK)	B) n'est pas orthogonale au plan (IJK)	C) appartient au plan (IJK)	D) parallèle au plan (IJK)

Q14. *Une équation cartésienne du plan (IJK) est $ax + by + cz + d = 0$ avec*

A) $a = -1, b = -1,$ $c = 1$ et $d = -1/2$	B) $a = 1, b = -1,$ $c = 1$ et $d = -1/2$	C) $a = -1, b = -1,$ $c = 1$ et $d = 1/2$	D) $a = 1, b = 1,$ $c = -1$ et $d = -1/2$

ENSA

Q15. Les coordonnées du point M; intersection de la droite (FD) et le plan (IJK) sont :			
A) $(1/2, 1/2, 1/2)$	B) $(1/2, 0, 1/2)$	C) $(1/2, 1/2, 0)$	D) $(1, 1, 0)$

Q16. Le triangle IJK est			
A) Equilatéral	B) Rectangle en J	C) Rectangle en K	D) Rectangle en I

Exercice 2: Le QCM du concours ENSA comporte 20 questions, pour chacune desquelles 4 réponses sont proposées et une seule est correcte. Un étudiant décide de remplir la grille-réponses en cochant au hasard une réponse pour chacune des 20 questions. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq n \leq 20$, on note A_n « répondre au hasard exactement n fois correctement » ; l' évènement A_n est réalisé si n réponses sont correctes et $20 - n$ sont incorrectes.

$\binom{n}{p}$ désigne le nombre de combinaison de p parmi n.

Q17. Le nombre de grilles-réponses possibles est			
A) 24	B) 20^4	C) 80	D) 4^{20}

Q18. La probabilité de ne donner aucune réponse correcte est $P(A_0) =$			
A) $\frac{3^{20}}{4^{20}}$	B) $\frac{24}{4^{20}}$	C) $\frac{1}{20^4}$	D) $\frac{1}{80}$

Q19. La probabilité de donner exactement n bonnes réponses correctes est $P(A_n) =$			
A) $\frac{\binom{20}{n} 3^n}{4^{20}}$	B) $\frac{\binom{20}{n} 3^{20-n}}{4^{20}}$	C) $\frac{\binom{20}{3} 3^{20-n}}{20^4}$	D) $\frac{\binom{20}{3} 3^n}{80}$

Q20. La probabilite de répondre au hasard au moins 6 fois correctement est			
A) $\sum_{n=6}^{20} \frac{\binom{20}{n} 3^{20-n}}{4^{20}}$	B) $\sum_{n=0}^{6} \frac{\binom{20}{n} 3^{20-n}}{4^{20}}$.	C) $\sum_{n=6}^{20} \frac{\binom{20}{n} 3^{20-n}}{20^4}$	D) $\sum_{n=0}^{6} \frac{\binom{20}{n} 3^{20-n}}{20^4}$

Corrigé du concours d'accès en 1ére année des ENSA Maroc – Juillet 2018 effectué par Mr.EL ABBASSI Mohammed professeur de Mathématiques au lycée Ibn abdoun – Khouribga

Le 19/07/2018

Question 1

Cet exercice est une application d'un théorème dit théorème de Césaro :

Théorème

Si (u_n) est une suite réelle tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ avec $l \in R$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_1+u_2+...+u_n}{n} = l$.

Si on connait d'avance ce théorème on peut répondre à la question très rapidement en choisissant le D) comme réponse correcte.

En effet, considérons à la place de u_n le terme $u_n - u_{n-1}$ et ceci pour tout $n \in N^*$, comme on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - u_{n-1}) = 2$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(u_1-u_0)+(u_2-u_1)+...+(u_n-u_{n-1})}{n} = 2$ c.à.d $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n-u_0}{n} = 2$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n} - \frac{u_0}{n} = 2$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_0}{n} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n} = 2$.

Mais, un élève du lycée ne connait pas ce théorème, et pourtant s'il est malin, il peut quand même répondre à la question, en prenant un cas très particulier d'une suite arithmétique de raison 2 c.à.d tel que $(\forall n \in N)\ u_{n+1} - u_n = 2$, on voit bien qu'on a :

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 2$ et en même temps $(\forall n \in N)\ u_n = u_0 + 2n$ et par suite on a :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_0+2n}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_0}{n} + 2 = 2$.

Question 2

On a $(\forall n \in N^*)\ \left|\frac{\sin^2 n - \cos^3 n}{n}\right| = \frac{\left|\sin^2 n - \cos^3 n\right|}{n} \le \frac{2}{n}$ $\quad$ $(en\ appliquant\ l'inégalité\ triangulaire)$

Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin^2 n - \cos^3 n}{n} = 0$, donc la bonne réponse est le A).

On peut procéder autrement, comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin^2 n}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\cos^3 n}{n} = 0$ alors

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin^2 n - \cos^3 n}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin^2 n}{n} - \frac{\cos^3 n}{n} = 0$.

Question 3

On a $\lim\limits_{x\to1^+}\ln x.\ln(\ln x) = \lim\limits_{t\to0^+} t\ln t = 0$ $\quad$ $(en\ posant\ t = \ln x)$

D'où la bonne réponse est le B).

Question 4

On a : $\left(\forall n\in N^{*}\right)\ u_{2n}-u_{n}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$ et comme $\left(\forall k\in\{n+1,n+2,...,2n\}\right)$: $\frac{1}{k}\geq\frac{1}{2n}$ alors on a :
$\left(\forall n\in N^{*}\right)\ u_{2n}-u_{n}\geq\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2n}=n.\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$ d'où la bonne réponse est le A) .

Question 5

On a d'après la question 4 : $\left(\forall k\in N^{*}\right)\ u_{2^{k}}=u_{2.2^{k-1}}\geq\frac{1}{2}+u_{2^{k-1}}$ et donc en appliquant ce résultat on peut démontrer, aisément, par récurrence que $\left(\forall n\in N^{*}\right)u_{2^{n}}\geq\frac{n-1}{2}+u_{2}$ et comme $u_{2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ alors $\left(\forall n\in N^{*}\right)u_{2^{n}}\geq\frac{n-1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{n+2}{2}$.

On en déduit que : $u_{2^{10}}\geq\frac{10+2}{2}=6$. D'où la bonne réponse c'est le A) .

On pourrait procéder autrement : on a :

$$u_{2^{10}}=u_{2.2^{9}}\geq\frac{1}{2}+u_{2^{10-1}}=\frac{1}{2}+u_{2.2^{8}}\geq\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+u_{2^{8}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+u_{2^{10-2}}\geq...\geq\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+u_{2^{10-9}}=6$$

Question 6

On a $\left(\forall x\in N\right)\cos^{2}\left(Arc\tan x\right)=\frac{1}{1+\tan^{2}\left(Arc\tan x\right)}=\frac{1}{1+x^{2}}$ et donc $\cos\left(Arc\tan x\right)=\pm\frac{1}{\sqrt{1+x^{2}}}$
Et comme $\left(\forall x\in R\right)\ Arc\tan x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et on sait que $\left(\forall t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)\cos t\rangle 0$ alors
$\left(\forall x\in R\right)\cos\left(Arc\tan x\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^{2}}}$. D'où la bonne réponse est le B) .
On peut déduire le résultat autrement : Comme chacune des deux fonctions $Arc\tan$ et $\cos$ sont définies sur l'ensemble R tout entier alors les réponses candidates sont B) ou C) et comme $\left(\forall x\in R\right)\ Arc\tan x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et $\left(\forall t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)\cos t\rangle 0$ alors la bonne réponse est B) .

Question 7

On peut montrer, aisément, par récurrence sur n que $\left(\forall x\in R\right)\left(\forall n\in N\right)\ f\left(x\right)=f\left(\frac{x}{2^{n}}\right)$.

En fixant le x et en faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient :
$\lim_{n\to+\infty}f\left(\frac{x}{2^{n}}\right)=f\left(0\right)$ (*en utilisant le fait que* $\lim_{n\to+\infty}\frac{x}{2^{n}}=0$ *et le fait que* f *est continue en* 0) .
D'où $\left(\forall x\in R\right)\ f\left(x\right)=f\left(0\right)=cste$. D'où la bonne réponse est le A) .

Question 8

On a :

$$\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(a)+af(a)-af(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(a)(x-a)}{x-a}-a\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f(a)-af'(a).$$

D'où la bonne réponse est le D) .

Question 9

On a : $\int_0^1\frac{x^4}{x^2+1}dx=\int_0^1\frac{x^4-1+1}{x^2+1}dx=\int_0^1 x^2-1+\frac{1}{x^2+1}dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x+Arc\tan x\right]_0^1=-\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}$.

D'où la bonne réponse est le C) .

Question 10

$$\int_0^{\sqrt{3}}x^2\ln\left(x^2+1\right)dx=\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3}x^3\right)'\ln\left(x^2+1\right)dx=\left[\frac{1}{3}x^3\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^{\sqrt{3}}-\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{3}x^3\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)'dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^{\sqrt{3}}-\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{3}x^3\frac{2x}{1+x^4}dx=\left[\frac{1}{3}x^3\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^{\sqrt{3}}-\frac{2}{3}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^4}{1+x^2}dx$$

$$=\sqrt{3}\ln(4)-\left[\frac{1}{3}x^3-x+Arc\tan x\right]_0^{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}\ln(2)-\frac{2}{3}.\frac{\pi}{3}=2\left(\sqrt{3}\ln 2-\frac{\pi}{9}\right)$$

D'où la bonne réponse est le C) .

($On\ rappelle\ que\ Arc\tan 1=\frac{\pi}{4}\quad et\quad Arc\tan\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$)

Question 11

$Dans\ le\ repère\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)\ on\ a: F(1,0,1)\ et\ D(0,1,0), d'où\ \overrightarrow{FD}(-1,1,-1)$.

D'où la bonne réponse est C) .

Question 12

La droite (FD) passe par le point $D(0,1,0)$ et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{FD}(-1,1,-1)$

Donc $(FD)\begin{cases}x=-t\\ y=1+t\\ z=-t\end{cases}\quad(t\in R)$. D'où la bonne réponse est le C) .

Pour la suite de l'exercice, on a :

$$I\left(\frac{1}{2},0,0\right),\ J\left(0,\frac{1}{2},1\right),\ K\left(1,\frac{1}{2},0\right)\ \text{ et }\ \overrightarrow{IJ}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right),\ \overrightarrow{IK}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right),\ \overrightarrow{JK}(1,0,-1)$$

Question 13

On sait que le vecteur

$\overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IK}(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ *est orthogonale au plan* (IJK) *et comme* $\overrightarrow{FD}(-1,1,-1) = 2\overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IK}$ *alors le vecteur* $\overrightarrow{FD}$ *est orthogonale au plan* (IJK).

D'où la bonne réponse est le A) .

Question 14

Comme $-\overrightarrow{FD}(1,-1,1)$ *est normal au plan* (IJK) *alors* $(IJK): x-y+z+d=0$ et comme $I\left(\frac{1}{2},0,0\right) \in (IJK)$ alors $d=-\frac{1}{2}$ d'où $(IJK): x-y+z-\frac{1}{2}=0$. D'où la bonne réponse est le B) .

Question 15

Le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ *est le milieu du segment* $[FD]$, *donc il appartient à la droite* (FD) et comme ses coordonnées vérifient l'équation de (IJK) alors il appartient au plan (IJK) et comme $(FD) \perp (IJK)$ alors ce point est bien leur point d'intersection .

D'où la bonne réponse est le A) .

Question 16

On a $IK^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 = \frac{1}{2}$, $IJ^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{3}{2}$ et $JK^2 = 1^2 + 0^2 + (-1)^2 = 2$

et on remarque que $IK^2 + IJ^2 = JK^2$, d'où le triangle IJK est rectangle en I .

D'où la bonne réponse est le D) .

Exercice 2

Question 17

Chaque grille-réponses possible est composée de 20 questions et pour chaque question On a 4 choix possibles, donc d'après le principe du produit il y a 4^{20} grilles possibles .

D'où la bonne réponse est le D) .

Question 18

Si on désigne par Ω l'univers des éventualités de cette expérience aléatoire alors on a $card\Omega = 4^{20}$.

On a : $P(A_0) = \frac{card(A_0)}{card(\Omega)} = \frac{3^{20}}{4^{20}}$, car pour chaque réponse fausse il y a 3 choix possibles .

D'où la bonne réponse est le A) .

Question 19

Désignons par X la variable aléatoire qui est égale au nombre de réponses correctes. Cette variable aléatoire suit une loi binomiale de paramètres $20 \text{ et } p=\frac{1}{4}$.(pour chaque question la probabilité de choisir la bonne réponse est $\frac{1}{4}$) .

On a $P(A_n)=P(X=n)=C_{20}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\left(1-\frac{1}{4}\right)^{20-n}=\binom{20}{n}\frac{1}{4^n}\left(\frac{3}{4}\right)^{20-n}=\binom{20}{n}\frac{3^{20-n}}{4^{20}}$.

D'où la bonne réponse est le B) .

Question 20

La probabilité de répondre au hasard au moins 6 fois correctement est égale à

$P(X\geq 6)=\sum_{n=6}^{20}P(X=n)=\sum_{n=6}^{20}\frac{\binom{20}{n}3^{20-n}}{4^{20}}$.

D'où la bonne réponse est le A) .

End

J'espère avoir été bien clair.

Toute remarque ou suggestion est la bienvenue

elabbassimed2014@gmail.com