ENSA

Royaume du Maroc

[redacted]

Concours d'accès en 1ère année des ENSA Maroc
Juillet 2016

Epreuve de Mathématiques — **Durée : 1H30 min**

Exercice 1:

Soient a, b, c trois nombres complexes distincts, A, B, C leurs images dans le plan. On note

$$t = \frac{c-a}{b-a}$$

Q1. Soient $r \in \mathbb{R}_+^*, \theta \in \mathbb{R}$, la relation $t = re^{i\theta}$ se traduit géométriquement par :

A) $AC = rAB$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv 0[2\pi]$	B) $AB = rAC$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \theta[2\pi]$	C) $AC = rAB$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \theta[2\pi]$	D) $AC = r^2 AB$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \theta[2\pi]$

Q2. A, B, C sont alignés si et seulement si

A) $t \in i\mathbb{R}$	B) $t \in \mathbb{R}_+$	C) $t \in i\mathbb{R}_+$	D) $t \in \mathbb{R}$

Q3. Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si

A) $t \in i\mathbb{R}$	B) $t \in \mathbb{R}_+$	C) $t \in i\mathbb{R}_+$	D) $t \in \mathbb{R}$

Exercice 2:

Soit E un ensemble à n éléments, et $A \subset E$ un sous-ensemble à p éléments.

Q4. Le nombre de parties de E est

A) n^2	B) 2^n	C) n^n	D) $n!$

Q5. Le nombre de parties de E qui contiennent un et un seul élément de A est

A) $n\ 2^{n-p}$	B) $p\ n\ 2^{n-p}$	C) $p\ 2^{n-p}$	D) 2^{n-p}

Q6. On part du point de coordonnées $(0{,}0)$ pour rejoindre le point de coordonnées (p,q) (p et q entiers naturels donnés strictement supérieures à 1) en se déplaçant à chaque étape d'une unité vers la droite ou vers le haut. Combien y a-t-il de chemins possibles ?

A) C_{p+q}^{q}	B) qC_{p+p}^{q}	C) C_{pq}^{q}	D) 2^{p+q}

Q7. Soit f la fonction réelle définit de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

A) f est injective	B) f est surjective	C) f n'est pas injective	D) f est injective et n'est pas surjective

Q8. Combien le nombre 15! admet-il de diviseurs ?

A) 4032	B) 3042	C) 2034	D) 3044

Q9. Un QCM comporte 20 questions, pour chacune d'elles 4 réponses sont proposées, une seule est exacte.

Le nombre de grilles réponses possibles est :

A) 4^{20}	B) 20^4	C) 800	D) 80

Q10. Soit $(x,y,z)\in([0,1])^3$: $\alpha = Minimum\,\{x(1-y);\ y(1-z);\ z(1-x)\}$

A) $\alpha = 0$	B) $\alpha > \frac{1}{4}$	C) $\frac{1}{8} < \alpha < \frac{1}{4}$	D) $\alpha \leq \frac{1}{4}$

Q11.

$$\sum_{k=0}^{2016}(-1)^k C_{2016}^k =$$

A) 0	B) 1	C) 2	D) 3

Q12.

$$\sum_{1\leq i\leq 10}\ \sum_{1\leq j\leq 10}(i+j)^2 =$$

A) 10000	B) 10750	C) 13000	D) 13750

Q13. Toute fonction discontinue est :

A) constante	B) non dérivable	C) dérivable	D) périodique

Q14.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 sin\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x\neq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

A) f'n'est pas continue en 0	B) f'est continue en 0	C) f' admet une limite finie en 0	D) f' a pour limite $+\infty$ en 0

Q15.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2} =$$

A) 1	B) e^{-4}	C) $\sqrt{e}$	D) 0

Q16.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2cos^2\left(\frac{1}{x}\right)-sin\left(\frac{1}{x}\right)+3}{x+\sqrt{x}}$$

$A)+\infty$	$B)\ 0$	$C)\ 1$	$D)\ 3$

ENSA

Q17. Soit $r_i (i = 1,4)$ les quatres racines de l'équation réelle :

$$(x-7)(x-5)(x+4)(x+6) = 608$$

Le produit des racines

$$\prod_{i=1}^{4} r_i$$

vaut :

A) 464	B) 608	C) 232	D) 840

Q18.

$$\int_{e}^{e^2} \frac{1+\ln x}{x \ln x}\, dx =$$

A) $1-\ln 2$	B) $1+\ln 2$	C) $\ln 2$	D) 1

Q19.

$$\int_{0}^{1} x^2 \sin(\pi x)\, dx =$$

A) $\frac{\pi^2-4}{\pi^3}$	B) $\frac{\pi^2+4}{\pi^3}$	C) $\frac{4}{\pi^3}$	D) $\frac{-4}{\pi^3}$

Q20. Soient

$$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)} dx$$

et

$$J = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\cos(x)+\sin(x)} dx$$

A) $I = J = 0$	B) $I = \frac{\pi}{2}$ et $J = \frac{\pi}{4}$	C) $I = J = \frac{\pi}{4}$	D) $I = \frac{\pi}{3}$ et $J = \pi$

Correction du Concours d'entrée en 1ère année du cycle préparatoire
Ecole Nationale Des Sciences Appliquées

Correction mathématique

Q1 : réponse C

on a :

$$\begin{aligned} t = re^{i\theta} &\Leftrightarrow \begin{cases} |t| = r \\ \arg(t) \equiv \theta[2\pi] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = r \\ \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} AC = rAB \\ \left(\overline{AB}; \overline{AC}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases} \end{aligned}$$

Q2. Réponse D.

A, B, C sont alignés si et seulement si $\dfrac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$

si et seulement si $t \in \mathbb{R}$

Q3.Réponse A.

Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$

si et seulement si $t \in i\mathbb{R}$

Exercice 2 :

Q4. Réponse B.

Le nombre de parties de E est : $2^{card(E)} = 2^n$

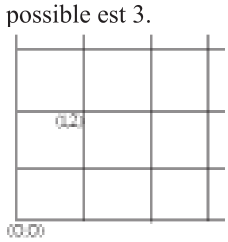
Q5. Réponse C.

Une parties de E qui contiennent un et un seul élément de A est la réunion d'un singleton de A et d'une partie de $E \setminus A$.

On a p façon pour choisir un élément de A et $2^{n\ p}$ pour choisir une partie de $E \setminus A$ (car $card(E \setminus A) = n - p$) , ainsi le nombre de parties de E qui contiennent un et un seul élément de A est $p2^{n\ p}$.

Q6. Réponse A.

On peut vérifier que pour le cas particulier $p=1$ et $q=2$, le nombre de chemin possible est 3.



Or $C_{1+2}^{2}=3$; $2C_{1+2}^{2}=6$; $C_{1\times 2}^{2}=1$ *et* $2^{1+2}=8$, alors la réponse est A.

Q7. Réponse C.

On a $\forall x\in\mathbb{R}^{*};\ f(x)=\dfrac{2}{\dfrac{1}{x}+x}$, alors $f(2)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, or $2\neq\dfrac{1}{2}$ alors $2\neq\dfrac{1}{2}$ alors f n'est pas injective. (de même pour n'importe réel non nul α on a $f(\alpha)=f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$)

Surjectivité de f : pour tous réels x et y , on a : $f(x)=y\Leftrightarrow yx^{2}-2x+y=0$

Le discriminant de l'équation $x\in\mathbb{R};yx^{2}-2x+y=0$ est $\Delta=4\left(1-y^{2}\right)$, ainsi f n'est pas surjective (il suffit de prendre $y\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$.

La réponse est donc C.

Q8. Réponse A.

On a :

$$\begin{aligned}15! &= 15\times14\times13\times12\times11\times10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\\ &= 2^{11}\times3^{6}\times5^{3}\times7^{2}\times11\times13\end{aligned}$$

Donc le nombre de diviseurs de $15!$ est $12\times7\times3\times4\times2\times2=4032$.

Q9.Réponse A.

Pour chaque question on choisie une réponse unique, donc le nombre de grilles possibles est $\left(C_{4}^{1}\right)^{20}=4^{20}$

Q10.Réponse A.

On a $\alpha\geq0$ car $\forall t\in[0;1],1-t\in[0;1]$. d'autre part, pour $x=0$ et y quelconque $x(1-y)=0$.

Ainsi $\alpha=0$.

Q11.Réponse A.

On a :

$$\sum_{k=0}^{2016}(-1)^k C_{2016}^k = \sum_{k=0}^{2016} C_{2016}^k (-1)^k 1^{2016-k}$$
$$= (-1+1)^{2016}$$
$$= 0$$

Q12. Réponse D.

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le i\le 10}\sum_{1\le j\le 10}(i+j)^2 &= \sum_{1\le i\le 10}\sum_{1\le j\le 10}\left(i^2+2ij+j^2\right)\\
&= \sum_{1\le i\le 10}\left(\sum_{j=1}^{10} i^2 + 2i\sum_{j=1}^{10} j + \sum_{j=1}^{10} j^2\right)\\
&= \sum_{1\le i\le 10}\left(10i^2 + 2i\frac{10\times 11}{2} + \frac{10\times 11\times 21}{6}\right)\\
&= 10\sum_{1\le i\le 10} i^2 + 110\sum_{1\le i\le 10} i + \sum_{1\le i\le 10} 385\\
&= 10\times\frac{10\times 11\times 21}{6} + 110\times\frac{10\times 11}{2} + 10\times 385\\
&= 13750
\end{aligned}$$

On rappel que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (on a aussi $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$)

Q13. Réponse B.

Toute fonction discontinue est non dérivable.

Q14. Réponse A.

On a $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

Puisque $\forall x \in \mathbb{R}^*, \left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le |x|$ alors $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Or la fonction $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0, alors si f' n'admet de limite en 0.

Donc la fonction f' n'est pas continue en 0.

($f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, car $\forall x \in \mathbb{R}^*, \left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le |x|$).

Q15. Réponse B.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{(x+2)\ln\left(\frac{x-1}{x+3}\right)}$.

Et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)\ln\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}-4\times\dfrac{\ln\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)}{\dfrac{x-1}{x+3}-1}\times\dfrac{x+2}{x+3}=-4$.

car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)}{\dfrac{x-1}{x+3}-1}=\lim\limits_{t\to1}\dfrac{\ln(t)}{t-1}=1$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}=e^{-4}$.

Q16. Réponse A.

On a $\forall x\in\left]0;+\infty\right[$, $\dfrac{2\cos^2\left(\dfrac{1}{x}\right)-\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)+3}{x+\sqrt{x}}\geq\dfrac{2}{x+\sqrt{x}}$.

Or $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2}{x+\sqrt{x}}=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2\cos^2\left(\dfrac{1}{x}\right)-\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)+3}{x+\sqrt{x}}=+\infty$.

Q17. Réponse C.

On pose $P(x)=(x-7)(x-5)(x+4)(x+6)-608$.

Donc $P(x)=(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)(x-r_4)$, ainsi :

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{4}r_i&=P(0)\\&=7\times5\times4\times6-608\\&=230\end{aligned}$$

Q18. Réponse B.

On a

$$\begin{aligned}\int_e^{e^2} \frac{1+\ln x}{x\ln x}\,dx &= \int_e^{e^2} \frac{1+\ln x}{x\ln x}\,dx \\ &= \int_e^{e^2} \left(\frac{\frac{1}{x}}{\ln x} + \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \left[\ln(\ln x) + \ln x \right]_e^{e^2} \\ &= 1 + \ln 2\end{aligned}$$

Ou bien

$$\begin{aligned}\int_e^{e^2} \frac{1+\ln x}{x\ln x}\,dx &= \int_e^{e^2} \frac{(x\ln x)'}{x\ln x}\,dx \\ &= \left[\ln|x\ln x| \right]_e^{e^2} \\ &= 1 + \ln 2\end{aligned}$$

Q19. Réponse A.

Par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 \sin(\pi x)\,dx &= \left[-\frac{1}{\pi} x^2 \cos(\pi x) \right]_0^1 + \frac{2}{\pi}\int_0^1 x\cos(\pi x)\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{\pi} x^2 \cos(\pi x) \right]_0^1 + \frac{2}{\pi^2}\left[x\sin(\pi x) \right]_0^1 - \frac{2}{\pi^2}\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{\pi} x^2 \cos(\pi x) \right]_0^1 + \frac{2}{\pi^2}\left[x\sin(\pi x) \right]_0^1 + \frac{2}{\pi^3}\left[\cos(\pi x) \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi^2 - 4}{\pi^3}\end{aligned}$$

Q20. Réponse C.

On a $\begin{cases} J + I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + \sin x}{\sin x + \cos x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \\ J - I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\,dx = \left[\ln|\sin x + \cos x| \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 \end{cases}$

Donc $I = J = \dfrac{\pi}{4}$.