UNIVERSITÉ CADI AYYAD

Ecole Nationale Des Sciences Appliquées

Marrakech

Année : 2005/2006

Session du : 25 Juillet 2006

Responsable : I. OUASSOU

Concours d'entrée en 1^{ére} année du cycle préparatoire

Epreuve de mathématiques (durée 1h15min)

Remarques importantes

1) Les documentations, les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.

2) Parmis les réponses proposées elle n'y a qu'une qui est juste.

3) Cocher la case qui correspond à la réponse correcte sur la fiche de réponses.

4) **Règles de notation** :

Réponse juste = **1 point** ; Réponse fausse = **-1 point** ; Sans réponse = **0 point**.

Noter Bien Plus qu'une case chochée = **-1 point**.

Exercices 1

Soit $a = 1 - i$ *et* $b = \sqrt{3} + i$.

a) *Le module de* a^7 *est* $8\sqrt{2}$.

b) *L'argument de* ab^2 *est* $\dfrac{5\pi}{12}$.

c) *L'argument de* $\dfrac{a^5}{b^3}$ *est* $-\dfrac{7\pi}{3}$.

d) *L'écriture algébrique de* b^4 *est* $b^4 = -4 + i4\sqrt{3}$.

Exercices 2

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(3x)}{\sin(4x)} = \frac{3}{4}$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \sqrt{4x^2 - x + 1} - 2x = +\infty$.

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ *n'existe pas.*

d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$.

Exercices 3

Soient les suites numériques (u_n) *et* (v_n) *définies pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *par*

$$u_0 = 1 \ , \ u_{n+1} = \frac{5u_n + 3}{u_n + 3} \ \textit{et} \ v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 1}.$$

a) La suite (u_n) *n'est pas bornée.*

b) La suite (v_n) *est décroissante.*

c) Pour tout entier $n > 0$, $u_n = \frac{3-3^n}{1-3^n}$.

d) La suite (u_n) *est convergente.*

Exercices 4

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n^2 - (-1)^n n + 1}{n + 3}$ *n'existe pas.*

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(n+1) - \ln(n+2) = -\infty$.

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{5}{2^n} = 0$.

d) $\lim\limits_{n \to +\infty} (-0,7)^n + (0,7)^n$ *n'existe pas.*

Exercices 5

On admet que dans une famille, pour toute naissance d'un enfant, la probabilité d'avoir un garçon est la même que celle d'avoir une fille et que, lors de deux naissances séparées, les sexes des enfants sont indépendants. Pour une famille de trois enfants (les naissances étant toujours séparées), on désigne par X *la variable aléatoire qui à chaque famille, associe le nombre de filles.*

a) $P(X = 1) = \dfrac{3}{8}$.

b) $P(X = 2) = \dfrac{3}{4}$.

c) $P(X = 3) = \dfrac{1}{4}$.

d) Soit $E(X)$ *la moyenne (l'espérence) de la variable aléatoire* X, $E(X) = \dfrac{9}{4}$.

Exercices 6

Soient f *et* g *deux fonctions continues sur l'intervalle* $[-1; 1]$.

a) Si $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} g(x)dx$ *alors pour tout* x *de* $[-1; 1]$, $f(x) = g(x)$.

b) *Si pour tout* x *de* $[-1;1]$, $|f(x)| = |g(x)|$ *alors* $\int_{-1}^{1} f^2(x)dx = \int_{-1}^{1} g^2(x)dx$.

c) *Si pour tout* x *de* $[-1;1]$, $f(x) = g^2(x)$ *alors* $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \left(\int_{-1}^{1} g(x)dx\right)^2$.

d) *Si pour tout* x *de* $[-1;1]$, $f(x) \geq 0$ *alors* $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2\int_{0}^{1} f(x)dx$.

Exercices 7

Dans l'espace raporté à un repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, *on considère la droite* (D) *intersection des deux plans d'équations cartésiennes* $x + y = 0$ *et* $x + y - z = 0$.

a) *La droite* (D) *passe par le point* $(0, 1, 2)$.

b) *La droite* (D) *a pour système paramétrique*

$$\left\{\begin{array}{c} x = k + 1 \\ y = 2k \\ z = k + 1 \end{array}\right. \quad , k \in \mathbb{R}.$$

c) *le vecteur* $\overrightarrow{u}(1, -2, -1)$ *est un vecteur directeur de la droite* (D).

d) *La droite* (D) *n'est pas orthogonale au plan d'équation cartésienne* $x + y - z = 2$.

Exercices 8

Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \cos(x)e^{\sqrt{1-\cos^2(x)}}$.

a) $f(\pi - x) - f(x) = 0$.

b) *Le point* $M\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ *est un centre de symétrie de la courbe représentative de* f *dans un repère orthonormé.*

c) *La dérivée de* f *est* $f'(x) = \left[\cos^2(x) - \sin(x)\right] e^{\sin(x)}$.

d) *Une primitive* F *de* f *est définie par* $F(x) = e^{\sin(x)}$.

Exercices 9

Soit la fonction f *de la variable réelle* x *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$.

a) *La fonction* f *est paire.*

b) *On a* $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$.

c) *la fonction* f *est décroissante sur* $\mathbb{R}$.

d) *Pour tout* $x \in]1, +\infty[$, $f(x) < 2$.

Exercices 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^x & si \quad x < 0 \\ \cos x & si \quad x \geq 0 \end{cases}.$$

On appelle $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère du plan. Soit Γ la représentation graphique de la fonction exponentielle ($x \to e^x$) dans le même repère.

a) *Dans la portion du plan correspondant aux points d'abscisses négatives, $\mathcal{C}_f$ est l'image de Γ par symétrie axiale dont l'axe de symértrie est l'axe des abscisses.*

b) *f est continue en 0.*

c) *f est dérivable en 0*

d) *l'équation $f(x) = 0$ possède au moins deux solutions dans l'intervalle $]-\infty; \pi]$.*

Exercices 11

a) *Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :*

$$f(x) = x \left[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right].$$

La dérivée f' de f est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par : $f'(x) = \sin(\ln x)$.

b) $7\ln\left(\sqrt{2}+1\right) + 2\ln\left(3+\sqrt{2}\right) - \ln\left(11+6\sqrt{2}\right) + 7\ln\left(\sqrt{2}-1\right) = \sqrt{2}$.

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)dx = \frac{3}{2}\ln 2$.

d) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = 4 - 2\sqrt{e}$.

Exercices 12

Soit (E) l'équation différentielle $y' + 2y = 3e^{-3x}$.

a) *La solution de (E) nulle en 0 est $f(x) = 3(e^{-2x} - e^{-3x})$.*

b) $f'(x) = 3e^{-3x}(-2e^{-2x} + 3)$.

c) *f est décroissante sur $\left]-\infty; \ln\left(\frac{2}{3}\right)\right]$ et croissante sur $\left[\ln\left(\frac{2}{3}\right); +\infty\right[$.*

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Exercices 13

Dans le plan complexe, on considère un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ direct.
Soit f la fonction définie par $f(z) = \dfrac{z}{z + \bar{z} - 1}$.

a) La fonction f est définie sur $\mathbb{C} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

b) On a $fof(z) = \dfrac{1}{f(z)}$.

c) L'antécédent de $-i$ par f est i.

d) Il existe un unique z vérifiant $f(z) = z$.

Exercices 14

Soit $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}\right)$ le repère orthonormal de l'espace. Soit $\mathcal{P}$ le plan de repère $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ où $A(-1,1,2)$, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

a) Le vecteur $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$ n'est pas normal au plan $\mathcal{P}$.

b) L'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est $x + y - 2z + 6 = 0$.

c) La droite (D) passant par le point $B(1,0,-1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$ est définie par :

$$\begin{cases} x + y - 1 & = & 0 \\ z + 2x - 1 & = & 0 \end{cases}.$$

d) Le plan $\mathcal{P}$ et la droite (D) se coupent au point $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$.

Exercices 15

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ et $f(0) = 0$.

a) La fonction f n'est pas continue en 0.

b) Sur $\mathbb{R} - \{0\}$, $f'(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}+1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

d) La droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f.