UNIVERSITÉ CADI AYYAD
Ecole Nationale Des Sciences Appliquées
Marrakech

Année : 2004/2005
Setion du : 27 Juillet 2005
Responsable : I. OUASSOU

Concours d'entrée en $1^{ére}$ année de l'ENSA de Marrakech

Epreuve de mathématiques (durée 1h15min)

Remarques importantes

1) La documentations, les calculatrices et les téléphones portables sont interdites.

2) Parmis les réponses proposées elle n'y a qu'une qui est juste.

3) Cochez la case qui correspond à la réponse correcte sur la fiche de réponses.

4) Réponse juste = **1 point** ; Réponse fausse = **-1 point** ; pas de réponse = **0 point**.

Noter Bien Plus qu'une case chochée = **-1 point**.

Exercices 1

a) Si $x = \left[\ln\left(e^{\sqrt{2}}\right)\right]^2 e^{-\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$ *alors* $x = \sqrt{2}$.

b) Si $x = \ln\left(\dfrac{3^2}{2^3}\right) - 4\ln(\sqrt{3})$ *alors* $x = \ln 8$.

c) Si $x = \dfrac{\left(\sqrt[4]{4}\right)^2}{\left(\sqrt[4]{3\sqrt{3}}\right)^2\sqrt{\sqrt{3}}}$ *alors* $x = \dfrac{2}{3}$.

d) Si $\ln(2x-1) = \ln(x-1)$ *alors* $x = 0$.

Exercices 2

Soit z_1 *et* z_2 *les nombres complexes dédinis par* $z_1 = \sqrt{3} - i$ *et* $z_2 = 2i - z_1$.

a) Le module de z_1^{-1} *est 2.*

b) Un argument de z_2 *est* $\dfrac{7\pi}{6}$.

c) Un argument de $\dfrac{z_2}{z_1}$ *est* $-\dfrac{\pi}{2}$

d) Le module de $\dfrac{z_2}{z_1}$ *est* $-\sqrt{3}$.

Exercices 3

360 personnes ont leurs anniversaires à des dates toutes distinctes dans l'année de 365 jours. Combien y-a-t-il de calendriers d'anniversaires possibles?

a) A_{365}^{360}.

b) C_{365}^{360}.

c) $360!C_{365}^{5}$.

d) $360!A_{365}^{5}$.

Exercices 4

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(5x)}{\sin(4x)} = \dfrac{4}{5}$.

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{3x}+1}{e^{2x}-1} = 1$.

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{1-x} = 1$.

d) $\lim\limits_{x\to -1} \ln\left(\dfrac{x+1}{x^2+3x+2}\right)$ *n'existe pas.*

Exercices 5

a) $\lim\limits_{n\to +\infty} 1+\sin(n^2+1) = 2$.

b) $\lim\limits_{n\to +\infty} \dfrac{\sin n}{\ln(n+1)}$ *n'existe pas.*

c) $\lim\limits_{n\to +\infty} \dfrac{2n^2+(-1)^n n}{n^2-1} = 2$.

d) $\lim\limits_{n\to +\infty} \sqrt{9n^2-n+1}-3n = \dfrac{1}{4}$.

Exercices 6

a) *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite géométrique de raison* q *alors* $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite géométrique de raison* q.

b) *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite bornée alors* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite convergente.*

c) *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite bornée alors* $\left(\dfrac{(-1)^n u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite qui converge vers 0.*

d) *Si* $u_n - \dfrac{1}{2} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *alors* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite qui converge vers* $\frac{1}{2}$.

Exercices 7

Soit la fonction f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(t) = \cos^2(t)\sin^3(t)$.

a) *La fonction* f *est paire.*

b) *La fonction* f *est* π*-périodique.*

c) *La courbe représentative de* f *dans un repère orthonormal* $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ *est symétrique par rapport au point* O.

d) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2(\theta)\sin^3(\theta)d\theta = \int_{-\pi}^{0} \cos^2(\theta)\sin^3(\theta)d\theta.$

Exercices 8

Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R} - \{-1\}$ *par* $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ *de courbe représentative* C *dans un repère orthonormal.*

a) *La courbe de la fonction* g_2 *définie sur* $\mathbb{R} - \{-1\}$ *par* $g_1(x) = \left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$ *se déduit de* C *par symétrie par rapport à l'axe des* y.

b) *La courbe de la fonction* g_3 *définie sur* $\mathbb{R} - \{-1\}$ *par* $g_2(x) = \dfrac{x+3}{x+1}$ *se déduit de* C *par translation de vecteur* $u(0,-2)$.

c) *La courbe de la fonction* g_3 *définie sur* $\mathbb{R} - \{-1\}$ *par* $g_1(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ *se déduit de* C *par symétrie par rapport à l'axe des* x.

d) *La courbe de la fonction* g_4 *définie sur* $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ *par* $g_4(x) = \dfrac{1-2x}{2x+1}$ *se déduit de* C *par homothétie de centre 0 et de rapport 2.*

Exercices 9

Soit la fonction f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)$ *de courbe représentative* C *dans un repère orthonormal.*

a) $f'(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$ *sur* $\mathbb{R}$.

b) La droite d'équation $y=x-2$ *est asymptote à la courbe* C.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$.

d) La droite d'équation $y=\ln 2$ *est asymptote à la courbe* C.

Exercices 10

a) La fonction $x \rightsquigarrow \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^3}$ *est la dérivée de la fonction* $x \rightsquigarrow \dfrac{2x^3-5x^2+1}{x^2}$ *sur* $\mathbb{R}$.

b) La fonction $x \rightsquigarrow \dfrac{5}{2}\sin(x)\,[\cos(x)]^{\frac{3}{2}}$ *est la dérivée de la fonction* $x \rightsquigarrow (\cos x)^{\frac{5}{2}}$ *sur* $\mathbb{R}$.

c) La fonction $x \rightsquigarrow \ln\left(x^2+x+1\right)+\dfrac{x(2x+1)}{x^2+x+1}$ *est la dérivée de la fonction* $x \rightsquigarrow x\ln\left(x^2+x+1\right)$ *sur* $\mathbb{R}$.

d) La fonction $x \rightsquigarrow \dfrac{e^{\sqrt{2x+5}}}{2\sqrt{2x+5}}$ *est la dérivée de la fonction* $x \rightsquigarrow e^{\sqrt{2x+5}}$ *sur* $\left]-\frac{5}{2},+\infty\right[$.

Exercices 11

Soient $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ *le repère orthonormal direct du plan et* D *la droite de vecteur directeur* $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}$ *passant par le point* $A(1,0)$.

a) L'ensemble des points $M(x,y)$ *dont les coordonnées vérifient l'équation* $x^2-2x+3+y^2+4y=0$ *est le cercle de centre* $C(1,-2)$ *de rayon 2.*

b) L'équation cartésienne de la droite D *est* $y=1+x$.

c) La distance de la droite D *au point de coordonnées* $(1,1)$ *est* $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

d) La droite D coupe la courbe d'équation $y = 2x^2$ en un point de coordonnées $(-1, 2)$.

Exercices 12

a) $\displaystyle\int_0^2 \left|x^2 - x\right| dx = \frac{2}{3}$.

b) La fonction $x \rightsquigarrow (x+2)e^{-x}$ est une primitive de la fonction $x \rightsquigarrow (x+1)e^{-x}$.

c) La fonction $x \rightsquigarrow 2\sqrt{x^2+x+1}$ est une primitive de la fonction $x \rightsquigarrow \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

d) La fonction $x \rightsquigarrow \ln|2+3\sin(x)|$ est une primitive de la fonction $x \rightsquigarrow \dfrac{\cos(x)}{2+3\sin(x)}$.

Exercices 13

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \sqrt{|4x^2-1|}$.

a) Sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$, $f'(x) = \dfrac{\sqrt{|4x^2-1|} - 4x}{\sqrt{|4x^2-1|}}$.

b) La droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe C.

c) La tangente à la courbe C représentative de f au point $(0, 1)$ a pour équation $y = x + 1$.

d) La droite d'équation $y = -3x$ est asymptote à la courbe C.

Exercices 14

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = e^{x+1}$.

a) $fog(x) = e^{x^2+2}$.

b) $(fog)'(x) = 2xe^{x^2+2}$.

c) fog est croissante.

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$.

Exercices 15

a) $\displaystyle\int_1^e x\ln(x)dx = \frac{e^2+1}{2}$

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x^2}dx = \ln\left(\frac{27}{4}\right)+1$

c) $\displaystyle\int_2^3 \ln(x)dx = \frac{1}{2} - \ln(\sqrt{2}).$

d) $\displaystyle\int_0^1 x^2e^{-x}dx = 2+\frac{5}{e}.$
