Université Cadi Ayyad 29 Juillet 2003
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Marrakech

Concours d'entrée en $1^{ére}$ année de l'ENSA de Marrakech
Epreuve de mathématiques (durée 1h30mn)

Attention !!!!!
Les calculatrices sont interdites.
Réponse juste =1 pt Réponse fausse = -1 pt pas de réponse = 0 pt.

Exercice 1.
Soient u, v et w dans N.
a) $\forall$ n $\in$Z u$\wedge v = u \wedge (v + nu)$
b) si u$\wedge v = 1$ et w divise u alors w$\wedge v$ =1
c) si w$\wedge u = 1$ alors u$\wedge v = u \wedge (v, w)$
d) si p est premier et ne divise pas u alors p et u sont premier entre eux.

Exercice 2.
Soient Z et Z' deux nombres complexes non nuls.
a)
$$\frac{1}{Z} = \frac{\overline{Z}}{|Z|^2}$$
b)
$$|Re(Z)| \leq |Z|$$
c)
$$||Z| - |Z'|| \leq |Z + Z'|$$
d)
$$Re(Z\overline{Z\prime}) = |Z|\,|Z'|\,.$$

Exercice 3.
Soient Z et Z' deux nombres complexes.
a) Arg(ZZ')=Arg(Z)+Arg(Z')

b) Arg(Z)=-Arg($\overline{Z}$)=Arg($\frac{1}{Z}$)
c) Arg(Z+Z')=Arg(Z)+Arg(Z')
d) Arg($\frac{Z}{Z'}$)=Arg(Z)-Arg(Z').

Exercice 4.
Soit la suite u $_n$= 1+$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+ .... +\frac{1}{n}$
a) la suite u$_n$ est croissante
b) la suite u$_n$ est convergente
c) la suite u$_n$ est majorée
d) la suite u$_n$ est positive.

Exercice 5.
Pour tout x∈ R^+ et tout (m,n)∈($N^*)^2$.
a)
$$(\sqrt[n]{x})^n = x$$
b)
$$\sqrt[n]{x^n} = x$$
c)
$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[(m+n)]{x}$$
d)
$$\sqrt[n]{x}.\sqrt[m]{x} = \sqrt[mn]{x^{m+n}}.$$

Exercice 6.
Soient E et F deux ensembles finis avec Card(E)=m et Card(F)=n.
a) Card(E∪F)=Card(E)+Card(F)
b) Card(E×F)=Card(E).Card(F)
c) Card(E∩F)=Card(E)+Card(F)-Card(E∪F)
d) Card(P(E))=2^m , avec P(E) est l'ensemble des parties de E.

Exercice 7.
Soient A et B deux parties d'un ensemble X.On note par P(A) la probabilité d'un événement A avec P(A)$\neq$ 0.
a) P(A∩B)=P(A).P(B)

b) P(A∪B)=P(A)+P(B)-P(A∩B)
c) P(A/B)P(A)=P(A∩B).P(B)
d) P($\overline{A}$)=1-P(A).

Exercice 8.
Soit pour tout x dans R* la fonction

$$f(x) = \frac{|x|}{x}.$$

a) La limite en 0 est 0
b) La limite en 0 est 1
c) La limite en 0 n'existe pas
d) La fonction f(x) est dérivable en 0.

Exercice 9.
Soit la fonction définie sur D= $]0, +\infty[$, par :

$$f(x) = x + 1 - \frac{\ln x}{x^2}.$$

a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
b) y=x+1 est une asymptote oblique
c) la fonction F(x) définie sur D par

$$F(x) = \frac{x^3 - 1 + 2\ln x}{x^3}$$

est une primitive de f sur D
d) f est décroissante pour x $\geq$ 1.

Exercice 10.
Soient deux fonctions

$$C(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}\ ) \quad et \quad S(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}\ )$$

a) $\mathrm{C}^2(x) - S^2(x) = 1$
b) les deux fonctions sont positives
d) C'=S et S'=C
d) les deux fonctions sont dècroissantes.

Exercice 11.
Soit la fonction f définie sur Df par

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2-4}$$

a) Df= $]-\infty,-2] \cup]2,+\infty[$
b) f st dérivable sur $]-\infty,-2] \cup]2,+\infty[$
c) $\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = +\infty$
d) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice 12.
Soit la fonction f defnie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2}{\pi} x Arc\tan(\frac{1}{|x|}) - 2x & si \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et on note par Df le domaine de definition de f.

a) Df = [01]
b) f est continue en 0
c) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
d) y=-2x+$\frac{2}{\pi}$ est l'asymptote au graphe de f quand x se rapproche de $+\infty$.

Exercice 13.
a)

$$\int_0^1 \frac{2x+2}{(x+1)^2} dx = 3\ln 2$$

b)

$$\int_1^{-1} e^{-x} dx = e^1 - e^{-1}$$

c)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx = \frac{1}{2}$$

d)

$$\int_0^2 \frac{e^x}{1+e^x} dx = \ln(\frac{1+e}{3}).$$

Exercice 14.

Dans le repère $(o,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$ on considère les plans (P) et (Q) d'équations :

(P) : 2x+y-13=0

(Q) : x-7y+16=0

et la droite (D) d'équation paramètrique (D) : $\begin{cases} x=5 \\ y=3 \\ z=t \end{cases} ; t \in R$

et la sphère (S) d'équation (S) : $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=25$.

a) l'intersection de (P) et (Q) est la droite (D)

b) l'intersection de (P) et (S) est un cercle

c) la droite (D) est tangente à (S)

d) la droite (D) n'est pas tangente à (S).

Exercice 15.

Dans le repère $(o,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$ on considère la sphère d'équation :

$x^2+y^2+z^2+x-\frac{1}{4}=0$

et le plan (P) d'équation y+z-1=0.

a) le centre de la sphère est $(-\frac{1}{2},0,0)$

b) le rayan de la sphère est $R=\frac{1}{2}$

c) le plan (P)est tangente a la sphère (S)

d) l'intersection de (P) et (S) est un cercle.