تصحيح جميع نهايات مباراة
ENSA من 2013 إلى 2017

page 1

* نهايات 2013 :

① $\lim\limits_{m\to+\infty} \frac{1}{m^2}\cdot\sum\limits_{K=1}^{m} E(7K)$

④ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(3x))}$

② $\lim\limits_{m\to+\infty} \sqrt[m]{2+(-1)^m}$

⑤ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x)+x^2}{\ln(x+x^2)}$

③ $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x+x^2}-\sqrt{x}}{\sqrt{3x}\,\ln(1+x)}$

M.NEBBAI

التصحيح :

① $\lim\limits_{m\to+\infty} \frac{1}{m^2}\cdot\sum\limits_{K=1}^{m} E(7K) = ?$

- نعلم أن : $x-1 < E(x) \leq x$

- إذن : $7K-1 < E(7K) \leq 7K$

$$7\sum_{K=1}^{m} K - m < \sum_{K=1}^{m} E(7K) \leq 7\sum_{K=1}^{m} K$$

"سوف نحاول تأطير هذه النهاية."

- نعلم أن : $\sum\limits_{K=1}^{m} K = \frac{m(m+1)}{2}$

$$\frac{7m(m+1)}{2m^2} - \frac{m}{m^2} < \frac{1}{m^2}\cdot\sum_{K=1}^{m} E(7K) \leq \frac{7m(m+1)}{2m^2}$$

- إذاً : $\lim\limits_{m\to+\infty} \frac{7}{2}\left(\frac{m+1}{m}\right) - \frac{1}{m} = \lim\limits_{m\to+\infty} \frac{7(m+1)}{2m} = 7/2$

- حسب قاعدة "limite gendarme" فإن :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} E(7k) = \frac{7}{2}$$

② $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2+(-1)^n} = ?$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2+(-1)^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(2+(-1)^n\right)^{1/n}$$

M.NEBBAI

$$= \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln(2+(-1)^n)}$$

(لأن : " $a^x = e^{x\ln a}$ ")

- إذا :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(2+(-1)^n)}{n} = ?$$

- إذا كان n زوجي فإن : $(-1)^n = 1$ بالتالي :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(2+(-1)^n)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(3)}{n} = \frac{\ln(3)}{+\infty} = 0$$

- إذا كان n فردي فإن : $(-1)^n = -1$ بالتالي :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(2+(-1)^n)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1)}{n} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

- ومنه فإن :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2+(-1)^n} = e^0 = 1.$$

③ $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x+x^2}-\sqrt{x}}{\sqrt{3x}\,\ln(1+x)} = ?$

- نستعمل تقنية "DL" بجوار 0 نعلم أن :

$\ln(1+x) \simeq x$ و $(1+x)^\alpha = 1+\alpha\cdot x$

- إذا :

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{3x}\cdot x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-1)}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{x}\cdot x}$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{1}+1/2\cdot x-1}{x\cdot\sqrt{3}} \longrightarrow$

لأن : $\sqrt{x+1} = (1+x)^{1/2}$

$\sqrt{x+1} = 1+1/2\cdot x$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{2\sqrt{3}\cdot x} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

M.NEBBAI

④ $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(3x))} = ?$

- نستعمل تقنية "DL" بجوار 0 نعلم أن :

$(a\in\mathbb{R}) / \cos(ax) \simeq 1-\frac{(ax)^2}{2}$ و $\ln(1+ax) \simeq ax$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1-2x^2)}{\ln\left(1-\frac{9x^2}{2}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+(-2x^2))}{\ln\left(1+\left(-\frac{9x^2}{2}\right)\right)}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{-2x^2}{\frac{-9x^2}{2}} = 4/9$

(5) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x) + x^2}{\ln(x + x^2)} = ?$

($\ln(1+x) \simeq x$ ← "DL")

$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x) + x^2}{\ln(x(x+1))} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x) + x^2}{\ln(x) + \ln(x+1)}$

" $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$ "

$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x) + x^2}{\ln(x) + x}$

($\ln(1+x) \simeq x$: بجوار 0)

$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x)\left[1 + \frac{x^2}{\ln(x)}\right]}{\ln(x)\left[1 + \frac{x}{\ln(x)}\right]}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{1 + \frac{x^2}{\ln(x)}}{1 + \frac{x}{\ln(x)}} = \frac{1+0}{1+0} = 1.$

M.NEBBAI

- نهاية 2014 :

- Soit $\delta \in]0, 1[$ calculer :

$\lim_{m \to +\infty} \prod_{K=0}^{m} (1 + \delta^{2^K})$

ملاحظة : $\delta^{2^K} \neq (\delta^2)^K$

- التصحيح

$$\lim_{m \to +\infty} \prod_{K=0}^{m} \left(1 + z^{2^K}\right) = ?$$

نعطي لـ m قيمة مفيدة لنبسط هذا الجداء.

مثلا : $m = 2$

$$\prod_{K=0}^{2} \left(1 + z^{2^K}\right) = (1+z)\times(1+z^2)(1+z^4)$$

- سوف نضرب هذا التعبير في : $\frac{1-z}{1-z}$

M.NEBBAI

$$= \frac{(1+z)(1-z)(1+z^2)(1+z^4)}{1-z}$$

$$= \frac{(1-z^2)(1+z^2)(1+z^4)}{1-z}$$

$$= \frac{(1-z^4)(1+z^4)}{1-z} = \frac{1-z^8}{1-z}$$

(لاحظ أن : $8 = 2^3 = 2^{2+1}$) و لدينا $m = 2$

- إذا : بصفة عامة :

$$\prod_{K=0}^{m} \left(1 + z^{2^K}\right) = \frac{1 - z^{2^{m+1}}}{1-z}$$

بالتالي :

$$\lim_{m \to +\infty} \prod_{K=0}^{m} \left(1 + z^{2^K}\right) = \lim_{m \to +\infty} \frac{1 - z^{2^{m+1}}}{1-z}$$

لدينا : $z \in]0,1[$ إذا $\lim_{m \to +\infty} (z)^m = 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ومنه فإن :

$$\lim_{m \to +\infty} \prod_{K=0}^{m} \left(1 + z^{2^K}\right) = \frac{1-0}{1-z} = \frac{1}{1-z}.$$

- نهايات 2015 :

① $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2015x)}{\sqrt[3]{x+343^3}-7}$ ③ $\lim_{m\to +\infty}\left(\frac{1}{m^3}\sum_{k=1}^{m} k^2 \cdot e^{-k/m}\right)$

② $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ ④ $\lim_{m\to +\infty} \frac{\sin(m)}{m+(-1)^{m+1}}$

M.NEBBAI : التصحيح *

① $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2015x)}{\sqrt[3]{x+343^3}-7}$

$\left((1+x)^\alpha = 1+\alpha\cdot x \ ; \ \sin(ax) \simeq ax \leftarrow \text{"DL"} \right)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2015x}{\sqrt[3]{343^3}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{x}{343^3}}-7}$ " $\sqrt[3]{343^3} = 7$ "

$= \lim_{x\to 0} \frac{2015x}{7\left(\sqrt[3]{1+\frac{x}{343^3}}-1\right)}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2015x}{7\left(1+\frac{x}{3\times 343^3}-1\right)}$ $\left(1+\frac{x}{343^3}\right)^{1/3} = 1+\frac{x}{3\times 343^3}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2015x}{\frac{7x}{1029}} = 2015\times 147 =$

$= 296205.$

② $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = ?$ $\longrightarrow$ "Règle de l'hopital"

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{\dfrac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})'}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})'} = \lim_{x\to0^+} \frac{\dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to0^+} \frac{\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}-1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\frac{0}{0+1}-1}{1-0} = \frac{-1}{1} = -1.$$

③ $\lim\limits_{m\to+\infty}\left(\dfrac{1}{m^3}\cdot\sum\limits_{k=1}^{m} k^2\cdot e^{-k/m}\right) = ?$

"on utilise la somme de Riemann"

$$= \lim_{m\to+\infty} \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{k}{m}\right)^2\cdot e^{-k/m} = \int_0^1 x^2\cdot e^{-x}\cdot dx$$

$u = x^2 \to u' = 2x$ / $v' = e^{-x} \to v = -e^{-x}$ "المكاملة بالتجزئة"

$$= \left[-x^2 e^{-x}\right]_0^1 + 2\int_0^1 x e^{-x}\,dx$$

$u = x \longrightarrow u' = 1$ / $v' = e^{-x} \longrightarrow v = -e^{-x}$

$$= \left[-x^2\cdot e^{-x}\right]_0^1 - 2\left[x e^{-x}\right]_0^1 - 2\left[e^{-x}\right]_0^1$$

$$= e^{-1}(-5) + 2 = 2 - \frac{5}{e}$$

M.NEBBAI

4) $\lim\limits_{m \to +\infty} \dfrac{\sin(m)}{m+(-1)^{m+1}} = \lim\limits_{m \to +\infty} \dfrac{\sin(m)}{m-(-1)^m}$

$$= \lim_{m \to +\infty} \frac{\sin(m)}{(-1)^m} \cdot \frac{1}{\left(\frac{m}{(-1)^m} - 1\right)}$$

إذا: $-1 \leq \sin(m) \leq 1$ و $-1 \leq (-1)^m \leq 1$

$$\Downarrow$$

$$1 \leq \frac{\sin(m)}{(-1)^m} \leq 1 \Rightarrow \lim_{m \to +\infty} \frac{\sin(m)}{(-1)^m} = 1.$$

مع: $\lim\limits_{m \to +\infty} \dfrac{1}{\frac{m}{(-1)^m} - 1} = \dfrac{1}{\infty} = 0$

بالتالي فإن: $\lim\limits_{m \to +\infty} \dfrac{\sin(m)}{m+(-1)^{m+1}} = 0.$

- نهايات 2016:

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$

2) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2\cos^2\left(\frac{1}{x}\right) - \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 3}{x + \sqrt{x}}$

M.NEBBAI

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{2}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x}$

لدينا :

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-2x}{x^2+6x+9}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1.$

- إذا :

$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x}=\lim_{x\to+\infty}e^{x\ln\left(\frac{x-1}{x+3}\right)}$

"$a^x=e^{x\ln a}$"

$\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{x-1}{x+3}\right)$ نحسب أولا

ثم نعوضها فوق "e"

بالتالي :

$\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{x-4+3}{x+3}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1-\frac{4}{x+3}\right)$

- نعلم أن : $\ln(1+u)\simeq u$ إذا كانت u

تؤول إلى 0 .

- إذن :

$-\frac{4}{x+3}\longrightarrow 0$

$=\lim_{x\to+\infty}-\frac{4x}{x+3}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{4x}{x}=-4.$

ومنه فإن :

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x}=e^{-4}$

M.NEBBAI

2) نعلم أن : $-1 \leq \sin(1/x) \leq 1$

و : $2\cos^2(1/x) \geq 0$

- إذن : $2\cos^2(1/x) - \sin(1/x) \geq -1$

$$2\cos^2(1/x) - \sin(1/x) + 3 \geq 2$$

$$\frac{2\cos^2(1/x) - \sin(1/x) + 3}{x + \sqrt{x}} \geq \frac{2}{x + \sqrt{x}}$$

- بما أن : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{2}{x + \sqrt{x}} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

- إذن : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{2\cos^2(1/x) - \sin(1/x) + 3}{x + \sqrt{x}} = +\infty$

- نهايات ENSA 2017 :

1. $\lim\limits_{m \to +\infty} \frac{m - (-1)^m}{m + (-1)^m}$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{xe^{-x} + x^2}{x - \ln(x)}$

3. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 - 3x - 2}$.

M.NEBBAI

التصحيح :

↓

① $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n} = ?$ "ـ ندرس الحالات ـ"

* $\text{si } n \text{ pair} : (-1)^n = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n-1}{n+1} = \dfrac{n}{n} = 1$

* $\text{si } n \text{ impair} : (-1)^n = -1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n+1}{n-1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{n} = 1$

بالتالي :

$(\forall n \in \mathbb{N}) : \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n} = 1$

M.NEBBAI

② $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{xe^{-x}+x^2}{x-\ln(x)} = ?$ → "l'hopital"

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(xe^{-x}+x^2)'}{(x-\ln(x))'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}-xe^{-x}+2x}{1-1/x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}+x(2-e^{-x})}{1-\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} 2x = +\infty$$

③ $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3-3x-2} = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"}$ → "l'hopital"

$$= \lim_{x \to -1} \frac{(x^3+x^2-x-1)'}{(x^3-3x-2)'} = \lim_{x \to -1} \frac{3x^2+2x-1}{3x^2-3} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{(3x^2+2x-1)'}{(3x^2-3)'} = \lim_{x \to -1} \frac{6x+2}{6x} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Calendrier Académique 2018/2019
CP-3ème et 4ème Année

Mois	L	M	M	J	V	S	D	Sem	Sem	Activités
Septembre						1	2			
	3	4	5	6	7	8	9			
	10	11	12	13	14	15	16	1	1	Enseignements (1er MOHARRAM)
	17	18	19	20	21	22	23	2	2	Enseignements
	24	25	26	27	28	29	30	3	3	Enseignements
Octobre	1	2	3	4	5	6	7	4	4	Enseignements
	8	9	10	11	12	13	14	5	5	Enseignements
	15	16	17	18	19	20	21	6	6	Enseignements
	22	23	24	25	26	27	28	7	7	Enseignements
	29	30	31					8	8	Préparation
Novembre				1	2	3	4	8	8	Préparation
	5	6	7	8	9	10	11	9	9	Contrôle des connaissances
	12	13	14	15	16	17	18	1	10	Enseignements
	19	20	21	22	23	24	25	2	11	Enseignements (12 et 13 Rabiaa 1)
	26	27	28	29	30			3	12	Enseignements
Décembre						1	2	3	12	Enseignements
	3	4	5	6	7	8	9	4	13	Enseignements
	10	11	12	13	14	15	16	5	14	Enseignements
	17	18	19	20	21	22	23	6	15	Enseignements
	24	25	26	27	28	29	30	7	16	Enseignements
	31							17	17	Préparation
Janvier		1	2	3	4	5	6	17	17	Préparation
	7	8	9	10	11	12	13	18	18	Contrôle des connaissances
	14	15	16	17	18	19	20	19	19	Correction
	21	22	23	24	25	26	27			[illegible]
	28	29	30	31				20	20	Délibération du semestre
Février					1	2	3	20	20	Délibération du semestre
	4	5	6	7	8	9	10	21	21	Rattrapage
	11	12	13	14	15	16	17	1	22	Enseignements
	18	19	20	21	22	23	24	2	23	Enseignements
	25	26	27	28				3	24	Enseignements
Mars					1	2	3	3	24	Enseignements
	4	5	6	7	8	9	10	4	25	Enseignements
	11	12	13	14	15	16	17	5	26	Enseignements
	18	19	20	21	22	23	24	6	27	Enseignements
	25	26	27	28	29	30	31	7	28	Enseignements
Avril	1	2	3	4	5	6	7	8	29	Enseignements
	8	9	10	11	12	13	14			[illegible]
	15	16	17	18	19	20	21	31	31	Contrôle des connaissances
	22	23	24	25	26	27	28	1	32	Enseignements
	29	30						2	33	Enseignements
Mai			1	2	3	4	5	2	33	Enseignements
	6	7	8	9	10	11	12	3	34	Enseignements
	13	14	15	16	17	18	19	4	35	Enseignements
	20	21	22	23	24	25	26	5	36	Enseignements
	27	28	29	30	31			6	37	Enseignements
Juin						1	2	6	37	Enseignements
	3	4	5	6	7	8	9	7	38	Préparation
	10	11	12	13	14	15	16	8	39	Contrôle des connaissances
	17	18	19	20	21	22	23	9	40	Correction et Soutenance des PFA
	24	25	26	27	28	29	30	10	41	Délibération du semestre
Juillet	1	2	3	4	5	6	7	11	42	Rattrapage
	8	9	10	11	12	13	14	12	43	Délibération Annuelle
	15	16	17	18	19	20	21	13	44	Délibération Annuelle
	22	23	24	25	26	27	28		45	
	29	30	31						46	

Adopté au Conseil d'Etablissement le 02/7/2018