Sommes

Formules, méthodes de calcul et sommes classiques

Formules et méthodes de calcul :

Somme télescopique :

$$\sum_{k=0}^{n} b_{k+1} - b_k = b_{n+1} - b_0$$

Somme géométrique :
$\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \begin{cases} n+1 \;\; si \;\; z = 1 \\ \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \;\; sinon \end{cases}$$

Somme sur un triangle :

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=j}^{n} a_{i,j}$$

Factorisation de $a^n - b^n$:
$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}$:

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}\, b^k$$

Somme de puissances d'entiers, méthode de calcul de proche en proche :
Pour calculer de proche en proche les $S_n(p)$ [1], considérer la somme suivante :

$$S = \sum_{k=1}^{n} (k + 1)^{p+1} - k^p$$

Méthode de calcul par dérivation de sommes géométriques réelles :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour calculer $\sum_{k=0}^{n} (k + 1)\, x^k$, dériver l'expression donnant $\sum_{k=0}^{n} x^{k+1}$.

[1] $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^{*2},\; S_n(p) = \sum_{k=1}^{n} k^p$

Sommes classiques, à connaitre :

Sommes de puissances d'entiers pour les petits exposants :
$\forall n \in \mathbb{N}$:

⇢ $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Premiers termes de la suite des sommes d'entiers successifs : 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21…

⇢ $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Premiers termes de la suite des sommes de carrés d'entiers successifs : 0, 1, 5, 14, 30, 55…

⇢ $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Premiers termes de la suite des sommes de cubes d'entiers successifs : 0, 1, 9, 36, 100, 225…

→ *Remarquons qu'il existe des propriétés et méthodes de calcul similaires pour le produit.*