Qlq astuces de math pour les concours - medecine ensa - ensam -..

I) : les sommes & les produits ;

Symbole Σ

- $\sum_{\boxed{k=0}}^{5} f(k) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5)$

- $\sum_{\boxed{i=0}}^{3} f(k) = f(k) + f(k) + f(k) + f(k)$

symbole $\prod$

$\prod_{\boxed{k=1}}^{4} f(k) = f(1) \times f(2) \times f(3) \times f(4)$

$\prod_{\boxed{i=1}}^{4} f(k) = f(k) \times f(k) \times f(k) \times f(k)$

⚠ . attention à l'indice i, j, k dans les sommes ou prod

symbole : Σ (somme ou sigma) ⊕

" $\prod$ (produit ou pigma) ⊗

qlq exemples :

- $\sum_{k=1}^{3} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = ..$

$\sum_{k=1}^{5} i = i + i + i + i + i = 5i$

$\prod_{k=1}^{5} k = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

$\prod_{k=1}^{3} i = i \times i \times i = i^3$

tymath

somme usuelles et qlq méthodes de calcul

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}} \quad \boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \quad \boxed{\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}$$

2 : méthode de Telescopage : Soit (U_n) une suite $\neq 0$, $\forall$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} U_{k+1} - U_k = U_{n+1} - U_0} \quad \boxed{\prod_{k=0}^{n} \frac{U_{k+1}}{U_k} = \frac{U_{n+1}}{U_0}}$$

Demo :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} U_{k+1} - U_k = (\cancel{U_1} - U_0) + (\cancel{U_2} - \cancel{U_1}) + (\cancel{U_3} - \cancel{U_2}) + \cancel{\dots} + (U_{n+1} - \cancel{U_n})$$

$$= \boxed{U_{n+1} - U_0}$$ (ou par recurrence simple)

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} \frac{U_{k+1}}{U_k} = \frac{\cancel{U_1}}{U_0} \cdot \frac{\cancel{U_2}}{\cancel{U_1}} \cdot \frac{\cancel{U_3}}{\cancel{U_2}} \cdots \frac{U_{n+1}}{\cancel{U_n}} = \boxed{\frac{U_{n+1}}{U_0}}$$

qlq exemples

$$* \; S_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = -\sum_{k=1}^{n} U_{k+1} - U_k$$

avec : $U_k = \frac{1}{k}$, donc : $\boxed{S_1 = -(U_{n+1} - U_1) = 1 - \frac{1}{n+1}}$

$$* \; S_2 = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k)$$

On pose : $U_k = \ln(k)$, donc : $S_2 = \ln(n+1) - \ln(1)$

$$= \boxed{\ln(n+1)}$$

Y math Said

Exemple classique et intéressant :

• Exemple ici : est une méthode pour trouver les somme de $\sum_{k=1}^{n} k^p$; avec $p = 0, 1, 2, 3 \ldots$

On a : $(k+1)^2 - k^2 = k^2 + 2k + 1 - k^2 = 2k+1$

donc : $\boxed{(k+1)^2 - k^2 = 2k+1}$ (*)

On pose : $S_1 = \sum_{k=1}^{n} k$

$$(*) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} (k+1)^2 - k^2 = 2S_1 + \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$\Rightarrow (n+1)^2 - 1^2 = 2S_1 + n$$

$$\Rightarrow \frac{n^2 + 2n - n}{2} = S_1$$

$$\Rightarrow \boxed{S_1 = \frac{n(n+1)}{2}}$$

[Rq : On peut trouver S_1 par somme arithmétique — ou par autres méthodes.]

On pose : $S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$

On a : $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ (*)

$$(*) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 - k^3 = 3S_2 + 3S_1 + n$$

$$\Rightarrow (n+1)^3 - 1 = 3S_2 + 3S_1 + n$$

Donc : $\boxed{S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

de m̂ si on veut calculer : $\sum k^3$;

On a : $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$

(*) : $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} (k+1)^4 - k^4 = 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n$$

$$\Rightarrow \boxed{S_3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}$$ (de calculs à faire)

(2) Le somme géométrique ou arithmétique.

Rappelles : (U_n) arithmétique : ، حسابية

~~Déf~~ : $\cancel{\exists r \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}}$: $U_{n+1} - U_n = r$

- $U_n = U_p + (n-p)r$
- $U_n = U_0 + nr$
- $$\boxed{\sum_{k=p}^{n} U_k = \frac{U_p + U_n}{2} \cdot (n-p+1)}$$

• Suite geométrique : (V_n) متتالية هندسية

• $V_{n+1} = q V_n$. • $V_n = V_p \cdot q^{n-p}$

• $V_n = V_0 q^n$

$$\boxed{\bullet \sum_{k=p}^{n} V_k = V_p \cdot \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} \quad , q \neq 1}$$

Exemples :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} 3^k + 3k - 2$$

$$= \sum_{k=0}^{n} 3^k + \sum_{k=0}^{n} 3k - 2$$

$$= \sum_{k=0}^{n} V_n + \sum_{k=0}^{n} U_k \quad tq : U_n = 3n-2 , V_n = 3^n$$

$$= 3^0 \cdot \frac{(1-3^{n+1})}{1-3} + \frac{(3n-2-2)}{2} \cdot (n+1)$$

$$= \frac{3^{n+1}-1}{2} + \frac{(3n-4)(n+1)}{2}$$

$$= \frac{3^{n+1}-1+(3n-4)(n+1)}{2}$$

Exemple : pour les produits,

- $P_1 = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{n+1}{1} = n+1$

- $P_2 = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \cdots \times n = n!$

Exercice d'application :

. Calcule les somme suivant, calcule :

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} k + k^2 + k^3 + 3^k + (2k-1)$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} + k^2$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

$$S_4 = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$$

$$P_1 = \prod_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

avec : $0 < x < \pi/2$

$$P_2 = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k+3}$$

XYmath Saïd

4 : limites de somme

1 : Somme de Riemmen

• $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,dx$

• Si : $b = 1$ et $a = 0$, On a :

• $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx$

exemples : calculer la limite des sommes suivant.

1/ • $S_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(a + \frac{k}{n}\right)^2$

2/ • $R_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{n}{k+n}$

3/ • $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{n}{k^2+n^2}$

1/ : On pose : $f(x) = (a+x)^2 \Rightarrow f\left(\frac{k}{n}\right) = \left(a + \frac{k}{n}\right)^2$

donc : $\lim S_n = \lim \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 (a+x)^2\,dx$

$= \left[\frac{(a+x)^3}{3}\right]_0^1 = a^2 + a + 1/3$

2/ : $R_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\frac{k}{n}+1}$

On pose : $f(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$

donc : $\lim R_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \left[\ln(|1+x|)\right]_0^1 = \boxed{\ln 2}$

3/ : $T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}$

On pose : $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$

donc : $\lim R_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$= \left[\arctan(x)\right]_0^1 = \boxed{\pi/4}$

$\boxed{\text{Rappelles}}$: $(\arctan(u))' = \frac{u'}{1+u^2}$

: $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$

$\forall x \in]-\pi/2, \pi/2[$: $\arctan(\tan(x)) = x$

: $\lim_{+\infty} \arctan(x) = \pi/2$, $\lim_{-\infty} \dots = -\pi/2$

: $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$, $\forall x >$

II : autre style des sommes :

1 : binome de Newton :

$\forall a, b \in \mathbb{C}$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

- $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$; $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$
- $C_n^0 = 1$; $C_n^1 = n$, $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$
- $C_n^k = C_n^{n-k}$; $C_n^n = 1$

exemples :

- $(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{2} C_2^k a^k b^{2-k}$

$$= C_2^0 a^0 b^2 + C_2^1 ab + C_2^2 a^2 b^0$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

- $(a+b)^5 = \sum_{k=0}^{3} C_3^k a^k b^{3-k}$

$$= C_3^0 a^0 b^3 + C_3^1 ab^2 + C_3^2 a^2 b + C_3^3 a^3 b^0$$

$$= a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

xYmath-Said

Exemples : (Intéressant).

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

$$S_2 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k 1^{n-k} = (1+2)^n = 3^n$$

$$S_3 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k 3^{n-k} = (2+3)^n = 5^n$$

$$S_4 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k = (1-1)^n = 0$$

Exemples : classique $\boxed{\sum_{k=p}^{n} k^p C_n^k}$

On pose : $f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$

On a : $f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k C_n^k x^{k-1}$

$$f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} (k(k-1)) C_n^k x^{k-2}$$

Donc : $f'(1) = n 2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k C_n^k$

donc $S_1 = \sum_{k=1}^{n} k C_n^k = n 2^{n-1}$

Aymath Saïd

$$f''(1) = \sum_{k=2}^{n} C_n^k (k^2 - k) C_n^k$$

$$= \sum_{k=2}^{n} C_n^k k^2 - f'(1)$$

<u>donc</u> : $S_2 = \sum_{k=2}^{n} k^2 C_n^k = f'(1) + f''(1)$

$$= n 2^{n-1} + n(n-1) 2^{n-2}$$

<u>même</u> demarche pour : $S_3 = \sum_{k=3}^{n} k^3 C_n^k$

<u>exercice d'application</u> :

①: $\lim \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^3}{n^2}$, ②: $\lim \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{k/n}$

③: $\lim \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$;

①: $\sum_{k=0}^{n} k^3 C_n^k$, ②: $\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{2^k} C_n^k$

fy math Saïd

apropos de somme géométrique

$\boxed{\text{but: calcule de: } \sum k^p x^k}$

On pose: $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$

$$= \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^n - 1}{x - 1}. \text{ (Somme géo)}$$

On a: $f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} = \left(\frac{x^n - 1}{x - 1}\right)'$

donc: $\sum_{k=1}^{n} k x^k = x.\left(\frac{x^n - 1}{x - 1}\right)'$

$x = 1/2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \left| x\left(\frac{x^n - 1}{x - 1}\right)' \right|_{x=1/2}$

même methode pour $\sum k^2 x^k$ on derive une 2^{eme} fois, et on continue.

Exo d'app:

$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k}$; $S_2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 2^k$

$S_3 = \sum_{k=0}^{n} k^2$; $S_4 = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^3}{3^k}$

! toutes les méthode vus pour les sommes sont valables aussi pour les produits

III : les dérivées n-ème :

Formule de Leibniz :

$$\boxed{(f\times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}}$$

Rq : $h^{(i)}$ désigne la dérivée i-ème de la fonction h

$h^{(1)} = h'$, $h^{(2)} = h''$

exemple : $f(x) = \ln(1+x)$, $f^{(n)}(x) = ??$

On a : $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $f''(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$, $f'''(x) = \dfrac{2.1}{(1+x)^3}$

On Mq : $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}.(n-1)!}{(1+x)^n}$

càd : $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}.(n-1)!}{(1+x)^n}$ [à démontrer par Récurrence] exemple ; pour la for de Leibnez

calcules, $h^{(n)}(x)$ tq : $h(x) = e^x \sin(x)$

On pose : $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = e^x$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$: $g^{(n-k)}(x) = e^x$

. $f'(x) = \cos(x) = \sin(x + \pi/2)$

$f''(x) = \sin(x + \pi) = -\sin(x)$

On Mq que : $f^{(k)}(x) = \sin(x + k\pi/2)$

a verifier par Recurrence

donc :

$$\boxed{h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k e^x \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)}$$

Rq : On peut simplifier la Somme

tq ; $\sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) = \operatorname{Im}\left(e^{i(x + k\pi/2)}\right)$

aprés On utilise binome de Newton.

xymath Saïd

Règle d'Hopital :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

avec : $f(a) = g(a) = 0$

il y a d'autres conditions et des cas mais dans les concours ; On ne s'interesse pas à les conditions.

exemples :

1) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = 1/2$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{3x^2}$

$= \lim_{x \to 0} -\frac{1}{3}\left(\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right)$

$= -1/6$

3/ $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{2x^2} \cdot x = \frac{-1}{4} \times 0 = 0$

x 4math said

* methodes pour les integrales

①: Integration par parties, (IPP).

$$(f \times g)' = f'g + f \cdot g'$$

donc : $\boxed{\int_a^b f'g = [f \cdot g]_a^b - \int_a^b f \cdot g'}$

· ALPES

$\xrightarrow{\text{derivation}}$

$\xleftarrow{\text{Integration}}$

- A : Arctan, arccos, arcsin ...
- L : Log, ln.
- P : polynôme : حدودية
- E : exp, e^x
- S : sinus, cos, ...

exemple :

① $A = \int_0^1 x e^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 x' e^x dx$

$= e - \int_0^1 e^x dx$

$= e - e + e^0 = 1$

② $B = \int_0^{\pi/2} e^x \sin(x) dx = [-\cos x \, e^x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos(x) e^x dx$

$= [e^x \cos x]_0^{\pi/2} + [\sin(x) \cdot e^x]_0^{\pi/2} - B$

donc : $2B = [e^x(\sin(x) - \cos(x))]_0^{\pi/2} \Rightarrow B = \frac{\cdots}{2}$

4 math

* changement de variable

exemple : $I = \int_1^2 \frac{1}{e^x - 1}\, dx$

On pose : $t = e^x$ $\Rightarrow x = \ln(t)$.

$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$

$\Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$.

$\begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = e^2 \\ t = e \end{cases}$

donc : $I = \int_e^{e^2} \frac{1}{(t-1)} \cdot \frac{dt}{t}$

$= \int_e^{e^2} \frac{1}{t(t-1)}\, dt$

$= \int_e^{e^2} -\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1}\, dt$

$= \left[\ln\left|\frac{t-1}{t}\right| \right]_e^{e^2} = \dots$

Aymath Saïd

Changement de variable pour les fonctions trigo – (cos, sin, tan)

$$t = \tan(x/2) \Rightarrow \begin{cases} dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2} \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

exemple : $I = \displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos(x)}\,dx$

$t = \tan(x/2)$ donc $\begin{cases} x = \pi/3 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1/\sqrt{3} \\ t = 0 \end{cases}$

$$I = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2\,dt}{1+t^2} = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{2\,dt}{1-t^2}$$

$$= \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\,dt = \left[\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right]_0^{1/\sqrt{3}}$$

Aymath

*DEcomposition en element simples (DEES)

$$I = \int \frac{P(x)}{\varphi(x)}\, dx \;,\; P, \varphi \text{ deux polynômes}$$

<u>Si</u> : $\begin{cases} d^\circ P \geq d^\circ \varphi \Rightarrow \text{division euclidienne} + \text{DEES} \\ d^\circ P < d^\circ \varphi \Rightarrow \text{DEES} \end{cases}$

<u>exemples</u> :

$$I = \int_0^{1/2} \frac{x}{x^2-1}\, dx \qquad \begin{cases} P(x) = x \;,\; d^\circ P = 1 \\ \varphi = x^2-1 \;,\; d^\circ \varphi = 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{(x-1)(x+1)} \overset{\text{DEES}}{=} \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

<u>On a</u> : $(x+1) f(x) = \dfrac{x}{x-1} = b + (x+1)\cdot\left(\dfrac{a}{x-1}\right)$

<u>pour</u> : $\boxed{x=-1}$ $\qquad \dfrac{-1}{-1-1} = b + 0 \Rightarrow \boxed{b = 1/2}$

<u>On a</u> : $(x-1) f(x) = \dfrac{x}{x+1} = a + (x-1)\left(\dfrac{b}{x+1}\right)$

$\boxed{x=1}$ $\qquad \dfrac{1}{2} = a + 0 \Rightarrow \boxed{a = 1/2}$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\, dx = \frac{1}{2}\left[\ln|x-1| - \ln|x+1|\right]_0^{1/2}$$

Fymath

Exemple ②

$$I = \int_0^{1/2} \frac{x^2+x}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx \quad \boxed{\begin{array}{c} d^\circ P < d^\circ Q \\ \Rightarrow \text{DEES} \end{array}}$$

On pose : $f(x) = \dfrac{x^2+x}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

$$\overset{\text{DEES}}{=} \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}$$

de m : $a = \left|(x-1)f(x)\right|_{x=1}$

$$= \left|\frac{x^2+x}{(x-2)(x-3)}\right|_{x=1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$b = \left|(x-2)f(x)\right|_{x=2}$$

$$= \left|\frac{x^2+x}{(x-1)(x-3)}\right|_{x=2} = \frac{4+2}{-1} = -6$$

$$c = \left|(x-3)\cdot f(x)\right|_{x=3} = \frac{3^2+3}{2} = 6$$

donc :

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{6}{x-2} + \frac{6}{x-3}$$

$$I = \int_0^{1/2} f(x)\,dx = \Big[\ln|x-1| - 6\ln|x-2| + 6\ln|x-3|\Big]_0^{1/2}$$

$$= \dots$$

$\boxed{\text{cas 2}}$ $\boxed{d^\circ P \geq d^\circ Q}$

$$I = \int_0^{1/2} \frac{x^2-2x}{x-3}\,dx$$

$$\begin{array}{r|l} x^2-2x & x-3 \\ \hline -\;x^2-3x & x+1 \\ \hline x & \\ -\;x-3 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

$$x^2-2x = (x-3)(x+1)+3$$

$$\frac{x^2-2x}{x-3} = \frac{(x-3)(x+1)}{x-3} + \frac{3}{x-3}$$

$$= x+1 + \frac{3}{x-3}$$

~~$x^2-2x = x(x-2)$~~

$$I = \Big[x^2+x+3\ln|x-3|\Big]_0^{1/2} = \dots$$

xymath Said