Exercice 1 :

1) Calculer

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$$

On pose $\underset{x \to +\infty}{\sqrt{x} = X}$ ; $\underset{x \to +\infty}{x = X^2}$

$$\lim_{X \to +\infty} \frac{X^2+X}{X^2-X} = \lim_{X \to +\infty} \frac{X^2}{X^2} = 1$$

Exercice 2 :

Calculer le produit scalaire

$\vec{u}.\vec{v}$ et $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$

tels que $\vec{u}(\cos\theta, \sin\theta)$ ; $\vec{v}(-\sin\theta, \cos\theta)$

$\vec{u}.\vec{v} = -\cos\theta \times \sin\theta + \sin\theta \times \cos\theta = 0$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \sqrt{1} = 1$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = \sqrt{1} = 1$

Cas général :

$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$

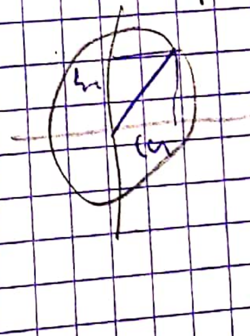
$\vec{v} = c\vec{i} + d\vec{j}$

$\vec{u}.\vec{v} = (a\vec{i} + b\vec{j})(c\vec{i} + d\vec{j})$

$= ac\vec{i}^2 + ad\vec{i}\vec{j} + bc\vec{i}\vec{j} + bd\vec{j}$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

pythagore



Exercice 3 :

Mq l'équation $\cos x + \frac{1}{2} = x$ admet une unique solution dans $]0, \frac{\pi}{3}[$

On pose $f(x) = \cos x + \frac{1}{2} - x$

$f$ continue sur $[0, \frac{\pi}{3}]$

$f(0) = 1 + \frac{1}{2} - 0 = \frac{3}{2} > 0$

$f(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{3} = 1 - \frac{\pi}{3} = \frac{3-\pi}{3} < 0$

car $\pi > 3$

$f(0) \times f(\frac{\pi}{3}) < 0$

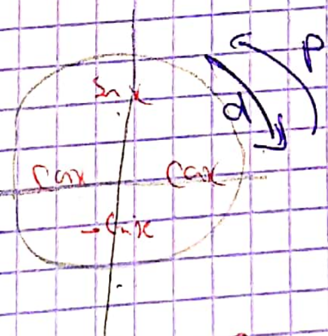
$f'(x) = -\sin x - 1 = -(\sin x + 1) < 0$

car $\forall x \in [0, \frac{\pi}{3}]$ $\sin x > 0$

$f$ st strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{3}]$

d'après T.V.I l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0, \frac{\pi}{3}[$

$\cos x + \frac{1}{2} = x$ admet une unique solution dans $]0, \frac{\pi}{3}[$




Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\sqrt[5]{3x-4} = 2$$

$D_E = [\frac{4}{3}, +\infty[$

Soit $x \in D_E$

$(E) \Leftrightarrow 3x - 4 = 2^5 = 32$

$\Leftrightarrow 3x = 36$

$\Leftrightarrow x = 12 \in D_E$

Scanné avec CamScanner

$S = \{12\}$

$f(x) = \sqrt[3]{5x-1}$ $\quad [\frac{1}{5}, +\infty[$

$f(x) = (5x-1)^{1/3}$ $\quad ]\frac{1}{5}, +\infty[$

Rappel :

$f(x) = \sqrt[n]{h}$ $\quad h \geq 0$

$f(x) = h^{1/n}$ $\quad h \geq 0$

$\sqrt[n]{h} = h^{1/n}$ $\quad h \geq 0$

Exercice 5 :

$f(x) = (x^2-1)^{1/3}$ $\quad x \geq 1$

determiner $f'(x)$

$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{1}{3}-1}(x^2-1)'$

$= \frac{2x}{3}(x^2-1)^{-2/3}$

l'hopital

$f^r$ $\quad f \geq 0$ $\quad r \in \mathbb{Q}^*$

$(f^r)' = r f' f^{r-1}$

Exercice 6 :

Calculer

$\lim_{x \to a} \frac{x\sqrt{x} - a\sqrt{a}}{x^3 - a^3} = \lim_{x \to a} \frac{(x\sqrt{x} + a\sqrt{a})(x\sqrt{x} - a\sqrt{a})}{(x^3-a^3)(x\sqrt{x} + a\sqrt{a})}$

$= \lim_{x \to a} \frac{1}{x\sqrt{x} + a\sqrt{a}}$

$= \frac{1}{2a\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{2a^2}$

Scanné avec CamScanner

Exercice 7 :

On pose $U_n = \frac{(n+1)\sqrt{n}}{n+2}$

Déterminer $\lim_{n \to +\infty} u_n$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)\sqrt{n}}{n+2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})}{(1+\frac{2}{n})} \sqrt{n}$$

$$= +\infty$$

car $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Exercice 8 :

$$U_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

$\lim_{n \to +\infty} u_n$

On sait que $-1 \leq (-1)^n \leq 1$

$$\Rightarrow -\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} |U_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

$$|U_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} |U_n| = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

Exercice 9 :

$S = 1 + i + i^2 + \dots + i^{2012}$

Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $i \neq 1$

donc

$$S = 1 \cdot \frac{1 - i^{2013}}{1 - i} = \frac{1 - (i^2)^{1006} \times i}{1 - i}$$

$$= \frac{1 - i}{1 - i} = 1$$

Exercice 10 :

soit $M(z)$

On pose $Z_1 = z^2 - z$

déterminer l'ensemble des pts $M(z) \in \mathbb{R}$

On pose $z = x + iy$ / $(x, y) \in \mathbb{R}$

$$Z_1 = (x + iy)^2 - (x + iy)$$

$$= x^2 - y^2 + i2xy - x - iy$$

$$= (x^2 - y^2 - x) + i(2xy - y)$$

$Z_1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(Z) = 0$

$\Rightarrow 2xy - y = 0$

$\Rightarrow y(2x - 1) = 0$

$\Rightarrow y = 0$ ou $2x - 1 = 0$

$\Rightarrow y = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$

l'ensemble des pnt est la droite $x = \frac{1}{2}$ et l'axe $y = 0$

Exercice 11 :

On considère le nbre complexe

$$z = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$$

1)_ déterminer la forme trigonométrique de $z$

2)_ déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$$\cos^2 X = \frac{1 + \cos(2X)}{2}$$

$$1 + \cos(X) = 2\cos^2\left(\frac{X}{2}\right)$$

$$\sin(2X) = 2\sin X \times \cos(X)$$

$$\sin X = 2\sin\left(\frac{X}{2}\right) \times \cos\left(\frac{X}{2}\right)$$

1)_

$$z = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\, 2 \times \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

$$0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2} \implies \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$$

$$z = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

2)_

$$|z| = \sqrt{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{3}{4} + \sqrt{3} + \frac{1}{4}}$$

$$= \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

et on a $|z| = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Scanné avec CamScanner

$$2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

Exercice 12 :

On pose

$$z_1 = \frac{1-i}{3+5i}$$

et

$$z_2 = \frac{1+i}{3-5i}$$

1- montrer que $z_1+z_2$ est un réel

et que $z_1 - z_2$ est imaginaire pur

$$\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$= \frac{1+i}{3-5i} + \frac{1-i}{3+5i}$$

$$= z_2 + z_1$$

$$\overline{z_1+z_2} = z_1+z_2$$

$$(z_1+z_2) \in \mathbb{R}$$

2- $\overline{z_1-z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

$$= \frac{1+i}{3-5i} - \frac{1-i}{3+5i}$$

$$= z_2 - z_1$$

$$\overline{z_1-z_2} = -(z_1-z_2)$$

$$(z_1-z_2) \in i\mathbb{R}$$

Scanné avec CamScanner

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z \Leftrightarrow \bar{z} - z = 0$

$z \in i\mathbb{R} \Rightarrow \bar{z} = -z \Leftrightarrow \bar{z} + z = 0$

Exercice 138

$f(x) = \frac{x}{\ln x}$

$g(x) = \sqrt{(x-1)\ln x}$

$D_f$, $D_g$ ?

$x \in D_f \Leftrightarrow x > 0$ et $\ln x \neq 0$

$\Rightarrow x > 0$ et $x \neq 1$

$D_f = ]0,1[ \cup ]1,+\infty[$

$x \in D_g \Leftrightarrow x > 0$ et $(x-1)\ln x \geq 0$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\ln x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $(x-1)\ln x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

$D_g = ]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$X = \frac{1}{x}$

$x \to +\infty$

$X \to 0$

$$= \lim_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X}$$

$(g\circ f)' = g'(f)$

* exemple :

$g(x) = f(\sin x)$ $\quad g'(x) = \cos x\, f'(\sin x)$

$h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad h'(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)$

Suite arithmetique de raison $r$ $(r>0)$

1) CV

$U_{n+1} - U_n = r > 0$

1) DV X

$U_n = U_p + (n-p)r$ $\begin{cases} r>0 & +\infty \\ r<0 & -\infty \end{cases}$

3) croissante X

$U_n = U_p\, q^{n-p}$

$x=a$ axe de symetrie

$(\forall x \in D_f)$ $\quad (2a-x) \in D_f$

$f(2a-x) = f(x)$

$\Omega(a,b)$ centre de symétrie

$(\forall x \in D_f)$ $\quad (2a-x) \in D_f$

$f(2a-x) = 2b - f(x)$

$V_n = (\sqrt{3}-2)^n$

$\lim_{n\to+\infty} V_n$

Scanné avec CamScanner

$-1 < \sqrt{3}-2 < 1$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} (\sqrt{3}-2)^n = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n = 0$

Exercice :

$B = \log_{1/a}(a)$ $\quad \left\{\begin{matrix} a>0 \\ a \neq 1 \end{matrix}\right.$

X $B = \log_a\left(\frac{1}{a}\right)$

X $B = -1$

$B = 0$

$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$

$B = \log_{1/a}(a) = \frac{\ln(a)}{\ln\left(\frac{1}{a}\right)} = \frac{\ln(a)}{-\ln(a)} = -1$

$\log_a\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{\ln\left(\frac{1}{a}\right)}{\ln a} = \frac{-\ln(a)}{\ln a} = -1$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{x}$

1) $\frac{1}{3}$

2) $3$ X

3) $-3$

$\lim_{X\to 0} \frac{e^{3x}-1}{3x} \times 3 = \lim_{X\to 0} \frac{e^X-1}{X} \times 3$

$= 3$

Ex : la valeur moyenne de $x \longrightarrow \sin(2x)$

sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{4}]$

Scanné avec CamScanner

$$V_m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \text{ : valeur moyenne}$$

$$V_m = \frac{1}{\frac{\pi}{4}-0}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x)\,dx$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}\cos 0\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{\sqrt{x+3}-2} = \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{x+7}-2)\left(\sqrt[3]{(x+7)^2}+2\sqrt[3]{x+7}+4\right)}{(\sqrt{x+3}-2)\left(\sqrt[3]{(x+7)^2}+2\sqrt[3]{x+7}+4\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\cancel{\left(\sqrt[3]{(x+7)^2}+2\sqrt[3]{x+7}+4\right)}(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)\left(\sqrt[3]{(x+7)^2}+2\sqrt[3]{x+7}+4\right)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}+2}{\left(\sqrt[3]{x+7}\right)^2+2\sqrt[3]{x+7}+4}$$

$$= \frac{4}{12}$$

$$= \frac{1}{3}$$

Montrer que l'équation $x^3+x^2-x+2=0$

admet dans $\mathbb{R}$

1) 3 S

2) 2 S

3) 1 S

On pose $f(x) = x^3 + x + x - e$

$f$ continue sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 > 0$ car $\Delta < 0$

$f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$$f(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \to -\infty} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x) \right[$$

$$= ]-\infty, +\infty[$$

$$= \mathbb{R}$$

$0 \in f(\mathbb{R})$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | $0$ |

$$f([0, +\infty[) = f([0, 1] \cup [1, +\infty[)$$

$$= f([0, 1]) \cup f([1, +\infty[)$$

$$= [-3, 2] \cup [-3, 0[$$

$$f(]-\infty, 0]) = ]0, 2]$$

$$f([0, 1]) = [-3, 2]$$

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \ln x = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \ln x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \times \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \times \frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

Scanné avec CamScanner

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x}+1}} * \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0$$

$$I = \int_0^2 |1-x|\,dx$$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

$$I = \int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx$$

$$= \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 1$$

Calculer

$$S = \overbrace{2}^{U_0} + 7 + 12 + 17 + \dots + 97 + \overbrace{102}^{U_n}$$

$$U_n = U_0 + nr$$

$$102 = 2 + 5n \Rightarrow 5n = 100 \Rightarrow n = 20$$

$$S = U_0 + U_1 + \dots + U_{21} = \frac{(U_0 + U_{20})\,21}{2}$$

$$= \frac{(2+102)\,21}{2}$$

$$= 52 \times 21$$

$$= 1092.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x^2+2x-5}$$

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}\cos^2\sqrt{2-x}}$$

$$z = (1-\sqrt{3})\, e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$|z| =$

$\arg(z) =$

on pose $\sqrt{x} = X \Rightarrow x = X^2$ ; $x \to +\infty$ , $X \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x^2+2x-5} = \lim_{X\to+\infty} \frac{2X}{X^4+2X^2-5}$$

$$= \lim_{X\to+\infty} \frac{2}{X^3}$$

$$= 0$$

$$(\tan g)' = \frac{g'}{\cos^2(g)} = g'(1+\tan^2 g)$$

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}\cos^2\sqrt{2-x}}$$

$$\int_0^2 \frac{\frac{1}{\sqrt{2-x}}}{\cos^2(\sqrt{2-x})}\,dx = -2\int_0^2 \frac{(\sqrt{2-x})'}{\cos^2(\sqrt{2-x})}\,dx$$

$$= -2\left[\tan(\sqrt{2-x})\right]_0^2$$

$$= -2\,(0-\tan\sqrt{2}) = 2\tan\sqrt{2}$$

$$z = (1-\sqrt{3})\, e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$z = (\sqrt{3}-1)\left(-e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = (\sqrt{3}-1)\, e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$= (\sqrt{3}-1)\, e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

Scanné avec CamScanner

$-e^{i\alpha} = e^{i(\pi+\alpha)}$

3 R     5 N    sans remise

$\boxed{8}$

la probabilité $P$ — 3R 5N

$\frac{3}{8}$    $\frac{15}{56}$    $\frac{1}{8}$    $\frac{1}{56}$    $\frac{15}{56}$

$$P = \frac{A_3^3 \times A_5^5}{A_8^8} = \frac{3! \times 5!}{8!} = \frac{6 \times \cancel{5!}}{8 \times 7 \times 6 \times \cancel{5!}}$$

$$= \frac{1}{56}$$

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

$$A_n^n = n!$$

Scanné avec CamScanner

Résoudre l'inéquation

$$1 + \ln x + \ln^2 x + \ln^3 x > 0$$

$D_f = ]0, +\infty[$

$1 + \ln x + \ln^2 x + \ln^3 x > 0$

$\Rightarrow 1 + \ln x + \ln x^2 (1 + \ln x) > 0$

$\Rightarrow (1 + \ln x)(1 + \ln x^2) > 0$

$\Rightarrow 1 + \ln x > 0$

$\Rightarrow \ln x > -1$

$\Rightarrow x > e^{-1} = 1/e$

$$S = \left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$$

Exercice

On pose
$$A = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \dots + \cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)$$

et
$$B = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \dots + \sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)$$

On considère le nombre complexe $z = A + iB$ le nombre complexe $z$ est égale à

A) $z = 0$

B) $z = 2i$

C) $z = \frac{1}{2}$

D) $z = 2i$

E) toutes les réponses proposées sont fausses

$Z = A + iB = 1 + \cos(\frac{\pi}{5}) + i\sin(\frac{\pi}{5}) + \cos(\frac{2\pi}{5}) + i\sin(\frac{2\pi}{5}) + \cdots + \cos(\frac{9\pi}{5}) + i\sin($

On pose $z = \cos(\frac{\pi}{5}) + i\sin(\frac{\pi}{5}) = e^{i\frac{\pi}{5}}$

donc $Z = 1 + z + z^2 + \cdots + z^9$ (somme des termes consécutifs d'une suite géométrique raison $q = z = e^{i\frac{\pi}{5}} = z$)

$$Z = 1\,\frac{1 - z^{10}}{1 - z}$$

$$= \frac{z^{10} - 1}{z - 1}$$

$$z^{10} = (z^{\frac{i\pi}{5}})^{10} = e^{i2\pi} = 1$$

$$\Rightarrow Z = \frac{1 - 1}{z - 1} = 0$$

I).

$$f'(x) = \frac{10x}{(x^2 - 3)^2}$$

$\forall x \in ]-\infty, 0]$ $f'(x)$

$f$ st strictement decroissante sur $]-\infty, 0]$

$f(0) = \frac{-2}{3} < 0$

$\forall x \in ]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ $f(x) < 0$

$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \Rightarrow |x| < \sqrt{2}$

$\Rightarrow x^2 < 2$

$\Rightarrow x^2 - 2 < 0$ et $x^2 - 3 < 0$

$\Rightarrow f(x) < 0$

$\forall x \in ]0, +\infty[$ $f'(x) > 0$

$g(x) = f(x)$ $x \in [0, +\infty[$

$J = f([0, +\infty[) = [\frac{-2}{3}, 1[ = [\frac{-2}{3}, 1[$

Scanné avec CamScanner

$g(y) = x \Rightarrow g^{-1}(x) = y$

$y \geq 0 \qquad x \in [-\frac{1}{3}, 1[$

$g(y) = x \Rightarrow \frac{y^2 - 1}{y^2 + 3} = x$

$\Rightarrow y^2 - 1 = xy^2 + 3x$

$\Rightarrow y^2(1 - x) = 3x + 1$

$\Rightarrow y^2 = \frac{3x+1}{1-x} \qquad x \neq 1$

$\Rightarrow y = \sqrt{\frac{3x+1}{1-x}} \qquad y \geq 0$

$g^{-1}(x) = \sqrt{\frac{3x+1}{1-x}}$

$(P): \quad x - 4y + 3z + d = 0$

$A \in (P) \qquad 3 - 4 + 3 + d = 0 \Rightarrow d = -2$

$(P): \quad x - 4y + 3z - 2 = 0$

$R = \Omega B = \sqrt{25 + 25 + 0} = \sqrt{2 \times 25}$

$= 5\sqrt{2}$

$d(\Omega, (P)) = \frac{|1 - 36 + 1 - 2|}{\sqrt{1 + 16 + 1}}$

$= \frac{36}{3\sqrt{2}} = \frac{12}{\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$

$d(\Omega, (P)) = 6\sqrt{2} > 5\sqrt{2}$

$(S) \cap (P) = \emptyset$

III).

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^2-x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{x-1} = -1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2} = 1$$

$$\int_0^1 \frac{3x}{\frac{9}{2}x^4+6x^2+2}\,dx = \int_0^1 \frac{6x}{9x^4+12x^2+4}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{6x}{(3x^2+2)^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 6x\,(3x^2+2)^{-2}\,dx$$

$$= \int_0^1 (3x^2+2)'\,(3x^2+2)^{-2}\,dx$$

$$= \left[\frac{(3x^2+2)^{-1}}{-1}\right]_0^1$$

$$= -\left[\frac{1}{(3x^2+2)}\right]_0^1$$

$$= -\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{10}$$

$$\frac{f'}{f} = \ln|f|$$

$$f' f^r = \frac{f^{r+1}}{r+1}$$

Scanné avec CamScanner

$$p(A) = \frac{C_6^3 + C_5^3}{C_{11}^3}$$

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{6\times5\times4}{6} = 20$$

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5\times4}{2} = 10$$

$$C_{11}^3 = \frac{11!}{3!\,8!} = \frac{11\times10\times9}{3\times2} = 165$$

$$p(A) = \frac{20+10}{165} = \frac{30}{165} = \frac{2}{11}$$

$$p(A\cap B) = \frac{C_3^3 + C_3^3 + C_3^3}{C_{11}^3} = \frac{1}{55}$$

$$p(B) = \frac{C_6^3 + C_5^3}{C_{11}^3} = \frac{2}{11}$$

$p(A\cap B) \neq p(A)\,p(B)$ ne sont pas indépen

R que

$f$ impair $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

Scanné avec CamScanner

Exercice 8

$(U_n)$ suite arithmétique

$U_2 + U_3 + U_4 = 21$ et $U_6 = 25$

$U_0 =$

A) = $-52$

B) = $-16$

C) = $-11$

D) = $1$

E) = $-10$

Exercice 2 :

$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1} + (n^2)^{\frac{1}{2}}$

A) = $e$

B) = $+\infty$

B) = $3$

D) = $0$

E) = $1$

Exercice 3 :

La fonction définie par

$$\begin{cases} h(x) = \dfrac{\sin(2x-\frac{\pi}{3})}{x-\frac{\pi}{3}} \quad ; \quad x \neq \frac{\pi}{3} \\ h(\frac{\pi}{3}) = a \end{cases}$$

Valeur de a pour que h soit continue en $\frac{\pi}{3}$

A) $e$

B) $0$

C) $1$

D) = $2$

E) = $-1$

Scanné avec CamScanner

$$U_n = U_p + (n-p)r$$

$$U_6 = U_2 + 4r \qquad U_2 = U_6 - 4r$$

$$U_6 = U_3 + 3r \quad \Rightarrow \quad U_3 = U_6 - 3r$$

$$U_6 = U_4 + 2r \qquad U_4 = U_6 - 2r$$

$$U_2 - U_3 + U_4 = 21 \Rightarrow \quad U_6 - 4r + U_6 - 3r + U_6 - 2r = 21$$

$$\Rightarrow \quad 3U_6 = 9r = 21$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{54}{9} = 6$$

$$U_6 = U_0 + 6r$$

$$U_0 = U_6 - 6r = 25 - 36 = -11$$

Exercice 2 :

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1} + (n^2)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 - n + 1}} + e^{\frac{2}{n} \frac{\ln n^2}{n}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}} + e^{2 \frac{\ln n}{n}}$$

$$= \frac{2}{2} + e^{0} = 1 + 1 = 2$$

$$a^x = e^{x \ln a}$$

Exercice 3 :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} h(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(2x - \frac{\pi}{3})}{x - \frac{\pi}{3}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{2\cos(2x - \frac{\pi}{3})}{1}$$

$$= \frac{2\cos\frac{\pi}{3}}{1} = 2 = h(\frac{\pi}{3}) = a$$

$$a = 2$$

Concours d'entrée 2006

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{2(x-1)}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \infty$$

$x = 1$ : asymptote verticale

$$\lim_{\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\infty} \frac{x^2 - 3x + 3}{2x^2 - 2x} = \lim_{\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\infty} f(x) - \frac{1}{2}x = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 3x + 3}{2x - 2} - \frac{x}{2}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 6x + 6 - 2x^2 + 2x}{4x - 4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-4x + 6}{4x - 4}$$

$$= \lim_{\infty} \frac{-4x}{4x} = -1$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 0^+ \\ x < 0}} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 0^+ \\ (x \geq 0)}} f(x) = -1$$

Scanné avec CamScanner

$$\lim_{\substack{x \to 0^+ \\ x>0}} f_n(x) = +\infty$$

$$f'_n(x) = \frac{x}{2} - \frac{m}{2} \cdot \frac{1}{\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{m}{2x}$$

$$= \frac{x^2 - m}{2x}$$

Le concours de la médecine pour l'an 2018-2019 est composé de 4 épreuves $(E_1)$, $(E_2)$, $(E_3)$, $(E_4)$

La probabilité de passé chaque épreuve égale à $\frac{1}{2}$

la proba de passer toutes les épreuves

A) $p = \frac{1}{2^{10}}$

$p = \frac{15}{2^4}$

$p = 1$

$p = 0$

$p = \frac{1}{2}$

$P(E_1) = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $P(E_4) = \frac{1}{2^4}$

$P(E_3) = \frac{1}{2^2}$

$P(E_4) = \frac{1}{2^3}$

Scanné avec CamScanner

$p(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4) = p(E_1) \times p(E_2) \times p(E_3) \times p(E_4)$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^2} \times \frac{1}{2^3} \times \frac{1}{2^4}$

$= \frac{1}{2^{10}}$

2) "Ordinaire 2003" Rabat"

$I = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+3} = \int_0^1 \frac{(x^2+x+3)'}{(x^2+x+3)} dx$

$= [\ln |x^2+x+3|]_0^1$

$= \ln(5) - \ln 3$

$= \ln\left(\frac{5}{3}\right)$

$I = \ln\left(\frac{5}{3}\right)$

$J = \int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2)' e^{x^2} dx$

$= \frac{1}{2} [e^{x^2}]_0^1$

$= \frac{1}{2}(e - e^0)$

$= \frac{1}{2}(e - 1)$

$= \frac{e-1}{2}$

$J = \frac{e-1}{2}$

2)

$\lim_{x \to +\infty} \ln(2x+1) - \ln(x+1) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)$

$= \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right) = \ln 2$

Scanné avec CamScanner

$$\lim_{x \to 2} \frac{e^x - e^2}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{h(x) - h(2)}{x-2}$$

$$h(x) = e^x \Rightarrow h'(x) = e^x$$

$h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier en 2

$X = x - 2$

$x = X + 2$

$x \to 2 \quad X \to 0$

$$\lim_{x \to 2} \frac{e^x - e^2}{x-2} = \lim_{X \to 0} \frac{e^{X+2} - e^2}{X}$$

$$= \lim_{X \to 0} \frac{e^2 (e^X - 1)}{X}$$

$$= e^2$$

$$y'' + y' - 2y = 0$$

l'équation caractéristique est $r^2 + r - 2 = 0$

$$\Delta = 9$$

$$r_1 = \frac{-1+3}{2} = 1 \qquad r_2 = \frac{-1-3}{2} = -2$$

les solutions de $(E)$

$$x \longrightarrow \alpha e^{-2x} + \beta e^x$$

$$(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

2) $f$ solution de $(E) \Rightarrow \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x) = \alpha e^{-2x} + \beta e^x$$

$$A(0,1) \in C_f$$

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f'(0) = 0$$

Scanné avec CamScanner

$$\begin{cases} f(0) = \alpha + \beta = 1 \\ f'(x) = -2\alpha e^{-2x} + \beta e^{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(0) = \alpha + \beta = 1 \\ f'(0) = -2\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha = 1 \\ \beta = 2\alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3} \text{ et } \beta = \frac{2}{3}$$

$$f(x) = \frac{1}{3} e^{-2x} + \frac{2}{3} e^{x}$$

$$f(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

1) $x \in D_f \Leftrightarrow x > 0$ et $1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \neq 0$

$\Rightarrow x > 0$ et $\frac{1}{\sqrt{x}} \neq 1$

$\Rightarrow x > 0$ et $\sqrt{x} \neq 1$

$\Rightarrow x > 0$ et $x \neq 1$

$$D_f = ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$$

$f$ est dérivable sur chacune des intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$

et on a

$\forall x \in D_f$

$$f'(x) = \frac{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)'}{1 - \frac{\sqrt{x}}{x}} = \frac{\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}}{\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{2x\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$$

$$= \frac{1}{2x(\sqrt{x} - 1)}$$

Scanné avec CamScanner

3)- $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln\left|1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right| = 0$

$$\left|1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right| = 1$$

$1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = 1$ ou $1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = -1$

$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}} = 0}_{\text{impossible}}$ ou $\frac{1}{\sqrt{x}} = 2$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$ et $x \in \mathcal{D}_f$

$\Leftarrow x = \frac{1}{4}$

$S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$

Scanné avec CamScanner

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^2 - x - 1} \, dx$$

$f(x) = \ln(5 - |x-1| - |5x-1|)$ $\qquad D_f$ ?

$$5 - |x-1| - |5x-1| > 0$$

$$5 > |x-1| + |5x-1|$$

$$|x-1+5x-1| \leq |x-1| + |5x-1| < 5$$

$$|6x-2| \leq |x-1| + |5x-1| < 5$$

$$|6x-2| < 5$$

$$-5 < 6x-2 < 5$$

$$-3 < 6x < 7$$

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{7}{6}$$

Scanné avec CamScanner

Exercice 8

On considère la suite numérique par

$U_0 = 1$ , $U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{1}{U_n}\right)$

$\lim_{n \to +\infty} U_n$

A) $-1$

B) $+\infty$

C) $\frac{1}{2}$

D) $1$

E) n'existe pas

Si $\lim U_n = l \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} U_{n+1} = l$

$\Rightarrow l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{1}{l}\right)$

$\Rightarrow 2l = l + \frac{1}{l}$

$\Rightarrow l = \frac{1}{l}$

$\Rightarrow l^2 = 1$

$\Rightarrow l = 1$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{n(-1)^n}{2n+1}$

A) $1$

B) n'existe pas

C) $0$

D) $-1$

E) $+\infty$

$$\lim_{\infty} |u_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n} u_n = 0$$

$$\left| \frac{n(-1)^n}{2n^2+1} \right| = \frac{n}{2n^2+1}$$

$$\lim_{+\infty} \frac{n}{2n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+\frac{1}{n}} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{+\infty} \left| \frac{n(-1)^n}{2n^2+1} \right| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{n(-1)^n}{2n^2+1} = 0$$

Exercice $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{3^k}$

A) $0$

B) $\frac{1}{6}$

C) $1$

D) $-1$

E) $\infty$

$$\sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{1}{3^k}\right) = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \cdots + \frac{1}{3^{n-2}} + \frac{1}{3^{n-1}}$$

Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

de raison $q = \frac{1}{3} \neq 1$

$$\sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{1}{3^k}\right) = \frac{1}{3^2} \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$-1 < \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{1}{3^k}\right) = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{9} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{6}$$

Scanné avec CamScanner

Exercice

Mq si $|2i - \bar{z}| = |2 + iz|$

alors $\Im(z) = 0$

Ona

$z = x + iy$ $\quad \bar{z} = x - iy$

$|2i - x + iy| = |2 + ix - y|$

$\Rightarrow |-x + i(2+y)| = |2 - y + ix|$

$\Rightarrow \sqrt{x^2 + (2+y)^2} = \sqrt{(2-y)^2 + x^2}$

$x^2 + 4 + y^2 + 4y = 4 + y^2 - 4y + x^2$

$8y = 0$

$y = 0$

$\Im(z) = 0$

Exercice :

On considère le nombre complexe

$z = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

On pose

$u = z + z^4$

et $v = z^2 + z^3$

1) Montrer que $u = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $v = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

2) Montrer que $1 + u + v = 0$

$u = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)$

$= \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(2\pi - \frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{2\pi}{5}\right)$

$= \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

$v = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)$

$= \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(2\pi - \frac{4\pi}{5}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{4\pi}{5}\right)$

$= 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

$1 + u + v = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4$ (Suite de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $z$)

$= 1 \cdot \frac{1 - z^5}{1 - z} = 1 - z$

$z^5 = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)^5 = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$

$1 + u + v = \frac{1 - z^5}{1 - z} = \frac{1 - 1}{1 - z} = 0$

Scanné avec CamScanner

$(U_n)$ est suite arithmétique décroissante de premier terme $U_0 = 2$ et de raison r

$$4(U_1)^2 + (U_2)^2 = 164$$

$r$ ?

A) 3

B) 6

C) $-6$

D) $-3$

E) 4

$U_1 = U_0 + r = 2 + r$

$U_2 = U_0 + 2r = 2 + 2r$

$4(2+r)^2 + (2+2r)^2 = 164$

$\Rightarrow 4(4 + 4r + r^2) + 4(1 + r)^2 - 164 = 0$

$\Rightarrow 16 + 4r^2 + 16r + 4 + 4r^2 + 8r - 164 = 0$

$\Rightarrow 8r^2 + 24r - 144 = 0$

$r^2 + 3r - 18 = 0$

$D = 9 + 72 = 81$

$r = \frac{-3+9}{2} = 3$

$r = \frac{-3-9}{2} = -6$

et comme $r < 0 \Rightarrow r = -6$

Scanné avec CamScanner

Casablanca 2008

I) -

$$z = \frac{(\sqrt{3}-i)^3}{(1+i)^4}$$

$$\sqrt{3}-i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$(\sqrt{3}-i)^3 = 2^3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -8i$$

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$(1+i)^4 = (\sqrt{2})^4\left(\cos\pi + i\sin(\pi)\right) = -4$$

$$z = \frac{-8i}{-4} = 2i$$

II) -

$$z = (1-\sqrt{3})\,e^{i\frac{\pi}{3}} = (\sqrt{3}-1)\left(-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$$

$$= (\sqrt{3}-1)\,e^{\frac{4\pi}{3}i}$$

$$|z| = \sqrt{3}-1 \qquad \arg z = \frac{4\pi}{3}$$

III) -

$$f(x) = -x\sqrt{16-4x^2} = -2x\sqrt{4-x^2}$$

$$D_f = [-2, 2]$$

$x \in ]-2, 2[$

$$f'(x) = -2\sqrt{4-x^2} - 2x\,\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}$$

$$= -2\sqrt{4-x^2} + \frac{4x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$= \frac{-2(4-x^2)+4x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4x^2-8}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4(x^2-2)}{\sqrt{4-x^2}}$$

Scanné avec CamScanner

| $x$ | $-2$ | | $-\sqrt{2}$ | | $\sqrt{2}$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

III)-

$$\lim_{x\to 0}\left(4-\frac{2}{x}\right)\times\ln(1+3x) = \lim_{x\to 0} 3(4x-2)\frac{\ln(1+3x)}{3x}$$

$$= -6$$

$\sqrt{x} = X$

$x = X^2$

$X \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x^3+2x-5}$$

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{2X}{X^6+2X^2-5} = \lim_{X\to+\infty} \frac{2}{X^5} = 0$$

$$(\tan(x))' = 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\tan(g))' = g'(1+\tan^2 g) = \frac{g'}{\cos^2 g}$$

IV -

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}\cos^2(\sqrt{2-x})} = -2\int_0^2 \frac{(\sqrt{2-x})'}{\cos^2(\sqrt{2-x})}\,dx$$

$$= -2\left[\tan\sqrt{2-x}\right]_0^2$$

$$= -2(0-\tan\sqrt{2})$$

$$= 2\tan\sqrt{2}$$

Scanné avec CamScanner

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{2}(6x^2+8x)}{2\sqrt{2(x^3+2x^2)}}\,dx = \sqrt{2}\int_0^1 \frac{(2(x^3+2x^2))'}{2\sqrt{2(x^3+2x^2)}}$$

$$= \sqrt{2}\left[\sqrt{2(x^3+2x^2)}\right]_0^1$$

$$= \sqrt{2}\,(\sqrt{6}-0) = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

IV

$$V_{n+1} = \ln(U_{n+1})$$

$$= \ln \sqrt[3]{U_n}$$

$$= \frac{1}{3}\ln U_n = \frac{1}{3}V_n$$

$$V_n = V_0\, q^n = \ln(U_0)\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$V_n = \ln(U_n) \Rightarrow U_n = e^{V_n}$$

$$U_n = e^{\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

$$S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$$

$$P_n = U_0 \times U_1 \times \dots U_n$$

$$\ln P_n = \ln(U_0) + \ln(U_1) + \dots + \ln U_n$$

$$= V_0 + V_1 + \dots + V_n$$

$$\ln P_n = S_n \Rightarrow P_n = e^{S_n}$$

Scanné avec CamScanner

$f(x) = \sqrt{x^2(x-1)}$ $\quad D_f = [1, +\infty[ \cup \{0\}$

Exercice

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2-4}\,dx$$

a) calculer

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{512}$$

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{(x-2)(x+2)}\,dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\ln|x-2|\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{4}\left[\ln|x+2|\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{4}(0 - \ln 3) - \frac{1}{4}(\ln 3 - 0)$$

$$= -\frac{\ln 3}{4} - \frac{\ln 3}{4} = -\frac{1}{2}\ln 3$$

$$= -\ln\sqrt{3}$$

2)

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^9} \qquad (2^9 = 512)$$

S : somme de termes consécutifs d'une SG de raison $q = -\frac{1}{2}$

donc

$$S = \frac{1}{2}\,\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^9}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{512}\right) = \frac{1}{3}\,\frac{513}{512} = \frac{171}{512}$$

3) calculer

$$K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^7(x)\,dx$$

$$K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^7(x) = 0 \qquad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0 \quad (f \text{ impair})$$

Scanné avec CamScanner

Q1)

$$f(x) = \frac{x-2}{\ln(x+1)}$$

$x \in Df$ ( $\ln(x+1) \neq 0$ ; $x+1 > 0$

$\ln(x+1) \neq 0$

$x+1 \neq 1$

$x \neq 0$ et $x > -1$

$Df = ]-1, 0[ \cup ]0, +\infty[$

Q2)

$$\lim_{x \to 1} \sqrt{\frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 6x - 7}} = \lim_{x \to 1} \sqrt{\frac{(x-1)(2x-1)}{(x-1)(x+7)}} = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Q3)

$$e^{2x} - e^x - 6 \geq 0$$

On pose $X = e^x$

$\Leftrightarrow X^2 - X - 6 \geq 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4 \times (-6)$

$= 25$

$$X = \frac{1 - \sqrt{25}}{2} = \frac{1-5}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$

$$X = \frac{1 + \sqrt{25}}{2} = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$(X-3)(X+2) \geq 0$

$(e^x - 3)\underbrace{(e^x + 2)}_{> 0} \geq 0$

$e^x - 3 \geq 0$

$e^x \geq 3$

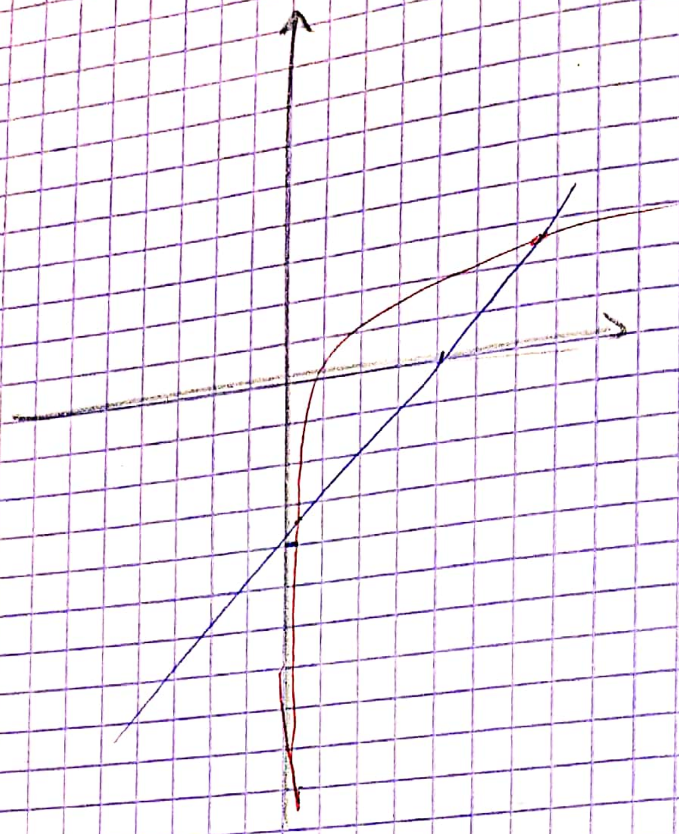
$x \geq \ln 3$

$S = [\ln 3, +\infty[$

Scanné avec CamScanner

$Q_4)$ - $h(x) = x - 2$ $\qquad y = x - 2$

$f = g$



$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 8x + 16} = \int_0^1 \frac{1}{(x+4)^2}$$

$$= \left[\frac{-1}{x+4}\right]_0^1$$

B

$$= \frac{1}{20}$$

$Q_5$ :

$U_2 = -5$

$U_6 = -6$

$U_6 = U_2 + (6-2)r$

$-6 = -5 + 4r$

$r = -\frac{1}{4}$

$U_2 = U_1 + r \Rightarrow U_1 = U_2 - r = -5 + \frac{1}{4}$

$U_1 = -\frac{19}{4}$

Scanné avec CamScanner

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{7^n\left(7+\frac{3^n}{7^n}\right)}{7^n\left(1-\frac{3^{n+1}}{7^n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{7+\left(\frac{3}{7}\right)^n}{1-\left(\frac{3}{7}\right)^{n}\times 3} = \frac{7}{1} = 7$$

C

$$z = \frac{-2(\sqrt{3}+i)}{i}$$

A

$$z = 2(\sqrt{3}\,i - 1)$$

$$= 4\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= 4\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$\arg(z) = \pi - \frac{\pi}{3}\ (2\pi) = \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$$

$$\arg(z) = \arg(-2) + \arg(\sqrt{3}+i) - \arg(i)$$

$$= \pi - \frac{\pi}{2} + \arg\left(2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

D

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \implies \vec{u} \perp \vec{v}$$

$\vec{AB}(-1,-1,1)$

$\vec{AC}(m-1,-1,2)$

$$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = 0 \Rightarrow -m+1+1+2 = 0$$

$$\Rightarrow -m = -4$$

$$\Rightarrow m = 4$$

Scanné avec CamScanner

obtenir exactement deux boules noirs

$card(\Omega) = 4^3 = 64$

Genre NNB

$$P(G) = \frac{3!}{2!\,1!} \frac{1^2 \times 3^1}{64} = \frac{3 \times 3}{64} = \frac{9}{64}$$

Exercice:

$$t = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

Red
Absurde

$n \in \mathbb{N}$

$t^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow n$ multiple de 4 (V)
(F)

$$t = \frac{1-i}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

$$= \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$t^n = \cos\left(-\frac{n\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{n\pi}{4}\right)$$

$t^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(t^n) = 0$

$\Rightarrow \sin\left(-\frac{n\pi}{4}\right) = 0$

$\Rightarrow -\sin\left(\frac{n}{4}\pi\right) = 0$

$\Rightarrow \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{n\pi}{4} = k\pi$

$\Rightarrow \frac{n}{4} = k$

$\Rightarrow n = 4k$

$k \in \mathbb{N}$

Scanné avec CamScanner

$\sin x = 0 \iff x = k\pi$

$\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\cos x = 1 \iff \cos \quad x = 2k\pi$

$\sin x = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\cos x = -1 \iff x = \pi + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

$\sin x = -1 \iff x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$$\cos a = \cos b \left\{ \begin{array}{l} a = b + 2k\pi \\ \text{ou} \\ a = -b + 2k\pi \end{array} \right.$$

$$\sin a = \sin b \left\{ \begin{array}{l} a = b + 2k\pi \\ a = \pi - b + 2k\pi \end{array} \right.$$

$\tan a = \tan b \iff a = b + k\pi$

$\tan a = \tan b \iff \quad a, b \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$\arg\left(\frac{z^2}{t^3}\right) = \frac{\pi}{12} \ [2\pi]$

$\arg\left(\frac{z^2}{t^3}\right) = 2\arg z^2 - \arg t^3$

$= 2\arg z - 3\arg t \ [2\pi]$

$= \frac{2 \times 2\pi}{3} - 3\frac{\pi}{4} \ [2\pi]$

$= \frac{150}{120} \ [2\pi]$

$= 2\pi - \frac{\pi}{12} \ [2\pi]$

Scanné avec CamScanner

Ex ~~concours~~ dentaire 2018

Determiner $U_n = \frac{2n + (-1)^n \sqrt{n}}{n+1}$

$\lim u_n$

A) _ 1

B) _ 2

C) _ 0

D) _ $+\infty$

E) _ n'admet pas de limit.

$-1 \leq (-1)^n \leq 1$

$-\sqrt{n} \leq (-1)^n \sqrt{n} \leq \sqrt{n}$

$\frac{2n - \sqrt{n}}{n+1} \leq \frac{2n + (-1)^n \sqrt{n}}{n+1} \leq \frac{2n + \sqrt{n}}{n+1}$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{2n - \sqrt{n}}{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{n}(2 - \sqrt{\frac{1}{n}})}{\cancel{n}(1 + \frac{1}{n})} = 2$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{2n + \sqrt{n}}{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{n}(2 + \sqrt{\frac{1}{n}})}{\cancel{n}(1 + \frac{1}{n})} = 2$

$\lim_{n \to +\infty} u_n = 2$

B

Exercice : Contrôle 2018

Soit $z = e^{\frac{2\pi}{5}i}$

On pose $\alpha = z + z^4$

$\beta = z^2 + z^3$

A) – $\alpha + \beta = 1$

B) – $\alpha + \beta = 0$

C) – $\alpha\beta = 2$

D) – $\alpha\beta = -1$

E) – $\alpha\beta = 1$

$\alpha + \beta + 1 = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \frac{1 - z^5}{1 - z} = \frac{1 - e^{2\pi i}}{1 - z} = 0$

$\alpha + \beta + 1 = 0$ (car $e^{i2\pi} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi)$

$= 1$

$z^5 = e^{i2\pi} = 1$)

$\Rightarrow \alpha + \beta = -1$

$\alpha\beta = (z + z^4)(z^2 + z^3) = z^3 + z^4 + z^6 + z^7$

$= z + z^2 + z^3 + z^4$

$= \alpha + \beta$

$= -1$

$\alpha\beta = -1$

Ex : 1) Calculer $\left(\frac{\sqrt{3} + i}{2}\right)^{12}$

2) – $\int_{-1}^{0} \frac{1}{1 + e^x}\,dx$

3) – $\int_{1/2}^{e} \frac{1}{x}|\ln x|\,dx$

$$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{12}$$

$$= \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^{12}$$

$$= \cos(2\pi) + i\sin(2\pi)$$

$$= 1$$

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right) dx$$

deux méthodes

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{e^x(e^{-x}+1)}\,dx = \left[x - \ln|1+e^x|\right]_{-1}^{0}$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\,dx \qquad = (0-\ln 2) - (-1 - \ln(1+e^{-1}))$$

$$= \int_{0}^{-1} \frac{(e^{-x}+1)'}{(e^{-x}+1)}\,dx \qquad = -\ln 2 + 1 + \ln\left(\frac{e+1}{e}\right)$$

$$= \left[\ln|1+e^{-x}|\right]_{0}^{-1} \qquad = \ln e - \ln 2 + \ln\left(\frac{e+1}{e}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{e}{2}\times\frac{e+1}{e}\right) = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$$

$$I = \int_{1/e}^{e} \frac{1}{x}|\ln x|\,dx$$

| $x$ | $1/e$ | | $1$ | | $e$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ln x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

$$I = \int_{1/e}^{1} \frac{1}{x}(-\ln x)\,dx + \int_{1}^{e} (\ln x)'\ln x\,dx$$

$$= \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_{1}^{1/e} + \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_{1}^{e} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Si $5 + 15 + 45 + 135 + \dots + N = 147\,620$

la valeur de $N$ : A) 49 205
B) 32 805
C) 49 845
D) 98 415