# COMPLEMENT SUR LES FONCTIONS

## I) complément sur les trinômes du second degré :

**On considère le trinôme** $P(x)=ax^2+bx+c$

1) Si $a+b+c=0$ alors $x_1=1$ et $x_2=\frac{c}{a}$ sont les racines du trinôme $P(x)$
( c.à.d. les solutions de l'équation $P(x)=0$ )

2) Si $b=a+c$ alors $x_1=-1$ et $x_2=\frac{-c}{a}$ sont les racines du trinôme $P(x)$
( c.à.d. les solutions de léquation $P(x)=0$ )

## II) complément sur les limites des fonctions trigonométrique :

1) $\lim\limits_{x\to a} u(x)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\frac{\sin(u(x))}{u(x)}=1$

2) $\lim\limits_{x\to a} u(x)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\frac{\tan(u(x))}{u(x)}=1$

3) $\lim\limits_{x\to a} u(x)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\frac{1-\cos(u(x))}{u(x)}=0$

4) $\lim\limits_{x\to a} u(x)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\frac{1-\cos(u(x))}{(u(x))^2}=\frac{1}{2}$

## III) complément sur les limites :

1) $\lim\limits_{x\to\infty} P(x)=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(P(x))}{Q(x)}=0 \quad (d^\circ Q\geq 1)$

2) $\left(\lim\limits_{x\to\infty} P(x)=+\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to\infty} Q(x)=\pm\infty\right) \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{P(x)}}{Q(x)}=\pm\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^n}{x^m}=0 \quad (m, n\in\mathbb{Q}_+^*)$ **Exemple :** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\ln x}}{\sqrt[3]{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}}=0$

## IV) théorème de l'hospital :

$$\left(\lim_{x\to a} f(x)=0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} g(x)=0\right) \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (a\in\mathbb{R} \text{ ou } \infty)$$

**Exemple :** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\pi\cos(\pi x)}{1}=-\pi$

## V) complément sur les branche infinies :

1) Si $f(x)=ax+b+u(x)$ tq $\lim_{x\to\infty} u(x)=c$ ( $c\in\mathbb{R}$ ) alors $y=ax+b+c$ est asymptote oblique a $(C_f)$

2) Soit $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ tel que $P(x)$ et $Q(x)$ sont deux polynômes

**a)** Si $d^\circ P\leq d^\circ Q$ alors $(C_f)$ admet une asymptote horizontale.

**b)** Si $d^\circ P=d^\circ Q+1$ alors $(C_f)$ admet une asymptote oblique d'équation $y=ax+b$ en effet :

$\frac{P(x)}{Q(x)}=ax+b+\frac{r}{Q(x)}$

**c)** Si $d^\circ P\geq d^\circ Q+2$ alors $(C_f)$ admet une branche parabolique de direction $(OY)$

## VI) tableau des opérations sur les dérivées :

$$(u(x)\times v(x))'=u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{(v(x))^2} \quad ; \quad \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2} \quad : \quad \left(\frac{1}{u(x)}\right)'=-\frac{u'(x)}{(u(x))^2}$$

$$(f(u(x)))'=u'(x)\times f'(u(x)) \ ; \ \left(\sqrt{u(x)}\right)'=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} \ ; \ (\ln(u(x)))'=\frac{u'(x)}{u(x)} \ ; \ \left(e^{u(x)}\right)'=u'(x)e^{u(x)}$$

$$(\sin(u(x)))'=u'(x)\times\cos(u(x)) \ ; \ (\cos(u(x)))'=-u'(x)\times\sin(u(x)) \ ; \ (\tan(u(x)))'=u'(x)\times\left(1+\tan^2(u(x))\right)=\frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}$$

## VII) complément sur les variations d'une fonction :

1) Pour étudier les variations de $f(x)=(u(x))^{v(x)}$ on écrit $f(x)$ sous la forme $f(x)=e^{v(x)\ln(u(x))}$

2) Pour étudier les variation d'une fonction monotone sur un intervalle I, on peut utiliser les images ou les limites sur I

## VIII) Eléments de symétrie dune courbe :

1) $(x=a)$ est un axe de symétrie de $(C_f)\Leftrightarrow \forall x\in D_f$ on a $2a-x\in D_f$ et $f(2a-x)=f(x)$

**Exemple** :
$f(x)=\cos^n(x)$ ( $n\in\mathbb{N}^*$ ) et $g(x)=\sin^m(x)$ avec m paire non nul

2) $\Omega(a;b)$ est un centre de symétrie de $(C_f)\Leftrightarrow \forall x\in D_f$ on a $2a-x\in D_f$ et $f(2a-x)=2b-f(x)$

**Exemple :** $f(x)=\sin^n(x)$ avec n impaire on a $\Omega(k\pi;0)$ est un centre de symétrie de $(C_f)$

**Remarque :** Si $f$ est une fonction impaire et $0\in D_f$ alors $f(0)=0$

# CALCUL INTEGRAL

1) $I=\int \frac{P(x)}{x-\alpha}dx \quad (d^{\circ}P \geq 1)$

Pour calculer $I$ on divise $P(x)$ par $x-\alpha$ (On utilise aussi le tableau d' HORNER)

Exemple : $I=\int_{-1}^{0} \frac{3x^3+x^2-2x-4}{x-1}dx$

Tableau d'HORNER

| cœfficients de $P(x)$ | 3 | 1 | -2 | -4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 × <br> 1 est sol de $x-1=0$ | + | = | | |
| | 3 | 4 | 2 | -2 |

$$P(x)=3x^2+4x+2+\frac{-2}{x-1}$$ Puis on calcul $I$

2) $J=\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$

On calcul le discriminant $\Delta$ de l'équation (E): $ax^2+bx+c=0$

- 1^er^ cas : $\Delta=0$ on a : $ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$ avec $x_1$ solution double de $(E)$

Donc : $J=\int \frac{1}{a(x-x_1)^2}dx=-\frac{1}{a}\left[\frac{1}{x-x_1}\right]$

-2^ème^ cas : $\Delta>0$ on a : $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ avec $x_1$ et $x_2$ les solutions de $(E)$

on calcul $\alpha$ et $\beta$ de $\mathbb{R}$ tq :

$$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{\alpha}{x-x_1}+\frac{\beta}{x-x_2} \Leftrightarrow (\alpha+\beta)x-\alpha x_2-\beta x_1=1 \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=0\\ -\alpha x_2-\beta x_1=1\end{cases}$$

puis on calcul : $J$

3) $I_2=\int \cos^n(x)dx \qquad I_1=\int$ "()nisdx $\quad n$ impair et $n>1$:

Remarque :Pour calculer $I_1$ on utilise : $\sin^n(x)=\sin(x)\times\sin^{n-1}(x)$ et $\sin^2(x)=1-\cos^2(x)$

Pour calculer $I_2$ on utilise : $\cos^n(x)=\cos(x)\times\cos^{n-1}(x)$ et $\cos^2(x)=1-\sin^2(x)$

Exemple : $I_1=\int \sin^3(x)dx$

$$I_1=\int \sin^2(x)\times\sin(x)dx=\int(\sin(x)-\sin(x)\times\cos^2(x))dx=\left[-\cos(x)+\frac{1}{3}\cos^3(x)\right]$$

**4)** $I = \int \tan^n(x)dx$ $n$ entier naturel et $n > 2$

Remarque : $\tan^n(x) = \tan^2(x) \times \tan^{n-2}(x) = (\tan'(x) - 1) \times \tan^{n-2}$

Exemple : $I = \int \tan^3(x)dx$ :

$$I = \int ((\tan'(x) - 1) \times \tan(x))dx = \int (\tan'(x)\tan(x) - \tan(x))dx = \left[\frac{1}{2}\tan^2(x) + \ln|\cos x|\right]$$

**5)** $I = \int e^x \sin(x)dx$ ( $\int$ )socexJ$dx$

On utilise une intégration par partie deux fois

**6)** $J = \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}dx$ et $I = \int_{0}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}dx$ $I$ est l'aire du quart du cercle de centre $O$ et de rayon $R$

donc $I = \frac{\pi R^2}{4}$ et $J$ est l'aire du demi-cercle de centre $O$ et de rayon $R$ donc $I = \frac{\pi R^2}{2}$

**7)** $I = \int_{-a}^{a} f(x)dx$ tq $f$ est une fonction impaire **on a :** $I = 0$

**8)** $J = \int U'(x)\cos(U(x))dx$ ; $I = \int U'(x)\left(1 + \tan^2(U(x)\right)dx = \int \frac{U'(x)}{\cos^2(U(x))}dx$

on a : $I = [\tan(U(x)]$ $J = [\sin(U(x)]$

Exemple : $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cos\sqrt{x^2+1}\ dx = \left[\sin\sqrt{x^2+1}\right]$

**9)** $J = \int \frac{1}{\sin(x)}dx$ ; $I = \int \frac{1}{\cos(x)}dx$

Remarque : $\frac{1}{\sin(x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} + \frac{\sin(x)}{1-\cos(x)}\right)$ et $\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)} + \frac{\cos(x)}{1-\sin(x)}\right)$

Groupe Scolaire la Résidence | *Cours de préparation aux concours d'accès à la faculté de médecine* | *Mathématiques*

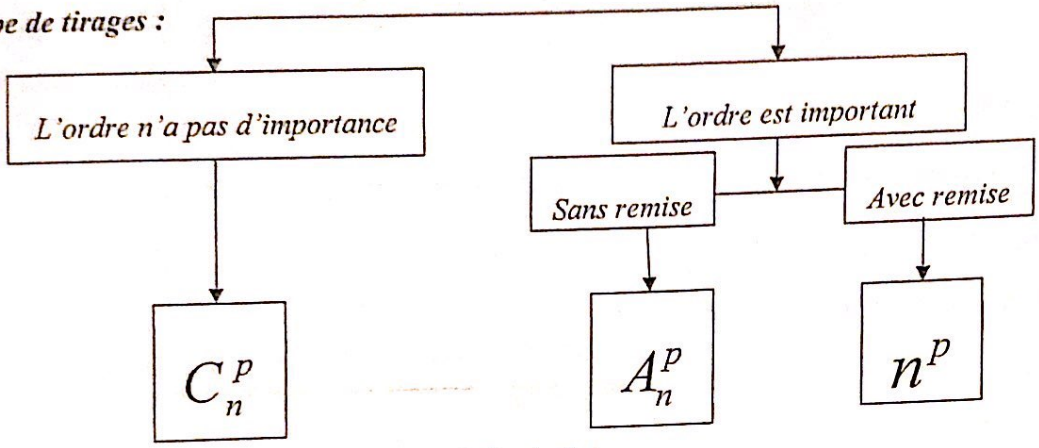
89, Avenue 2 Mars, Tél : 022-80-90-50/51

### *I. Dénombrement*

*Soit n de IN et p un entier naturel tel que* $0 \leq p \leq n$, $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$, $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ $C_n^p = C_n^{n-p}$

*Relation de Pascal* $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$ $(p+1 \leq n)$

***Différents type de tirages :***




*n est le nombre totale des boule et p est le nombre de boule tirées*

### *II. La probabilité d'un ensemble fini :*

***Définition :***

*Si* $\Omega = \{e_1; e_2; \ldots; e_n\}$ *est un univers fini, définir une probabilité, revient à associer à chaque éventualité* $\omega_i$ *de* $\Omega$ *un nombre réel* $P_i$ *de* $[0;1]$ *tel que :* $p_1 + p_2 + \ldots\ldots p_n = 1$

*On dit que la probabilité de l'éventualité* $\omega_i$ *est* $P_i$ *et on écrit* $P(\omega_i) = p_i$.

***Propriété :***
- *Pour tout A et B de* $\Omega$ : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$ *(avec* $\overline{A}$ *est l'évènement contraire de l'évènement A)*
- *Si* $A \cap B = \Phi$ *on dit que les deux evenement A et B sont non compatibles et dans ce cas on a :* $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

***Conséquences :*** *A et B deux évènement de* $\Omega$ *On a :* $0 \leq p(A) \leq 1$ *et* $p(\Omega) = 0$ *et* $p(\Phi) = 0$

***Propriété (Hypothèse d'équiprobabilité)***

*On dit qu'il ya équiprobabilité si les probabilités des événements élémentaires* $P_i$ *sont égales et dans ce cassi A est un énement de* $\Omega$ *la probabilité del' évènement A est :* $p(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)}$

### *III. Probabilité conditionnelle :*

***Définition :***

*Soit* $(\Omega, p)$ *un univers fini et A et B deux évènement tel que* $p(A) \neq 0$

*On appelle la probabilité conditionnelle de l'évènement B sachant que A est réalisé le nombre noté* $p_A(B)$ *ou* $p(B / A)$ *défini par :* $P_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{P(A)}$

*opriété :* Soit $(\Omega, p)$ un univers fini et A et B deux évènement tel que $p(A) \times p(B) \neq 0$

*ı a :* $p(B) \times p_B(A) = p(B) \times p_B(A) = p(A \cap B)$

***opriété :***

*it* $(\Omega, p)$ *un univers probabiliste fini et* $B_1, B_2, \ldots, B_n$ *une partition de* $\Omega$ *tel que :* $\forall i \in [1, n], p(Bi) \neq 0$

*ur tout A de* $\Omega$ *on a :* $p(A) = \sum_{i=1}^{n} p_{B_i}(A) \times p(B_i)$

***dépendance :*** **∘ *Indépendance de deux évènements :*** *A et B sont indépendants si :* $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

**∘ *Indépendance de deux expériences :***

*Si P est la probabilité d'un évènement A et si on répète dans les mêmes conditions l'expérience n fois et de manière indépendante alors la probabilité de réaliser l'évènement A, k fois est :* $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

***. Arbres pondérés :***

***finition :*** • *Un arbre est pondéré, si chaque branche est affectée d'une probabilité.*

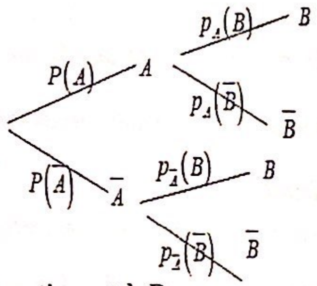
• *Un chemin va de la racine à l' extrémité en passant par des branches de l'arbre.*

• *L'origine commune de deux branches s'appelle un nœud.*

***cemple :*** *A et B deux évènements d' une expérience aléatoire*

*Si l'événement A est réalisé alors l'événement B peut être réalisé ou non .*

*Si l'événement A n' est pas réalisé alors l'événement B peut être réalisé ou non .*




***s règles d'un arbre pondéré :***

- *La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1.*

$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$ *et* $p_A(\overline{B}) = 1 - p_A(B)$ *et* $p_A(\overline{B}) = 1 - p_A(B)$

- *La probabilité d' un chemin est égale au produit des probabilités de ces branches .*

$\xrightarrow{P(A)} A \xrightarrow{p_A(B)} B \quad P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

- *La probabilité d'un évènement D est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à D*

$P(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B)$

***riable aléatoire :***

***finition :*** $(\Omega, p)$ *Un univers probabiliste fini et X une variable aléatoire définie dans* $\Omega$

*ensemble* $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_m\}$ *est l'ensemble des valeurs d'une variable aléatoire X.*

*ı variable aléatoire X est définie lorsque on associe à chaque valeur de* $x_i$ *le nombre* $p(X = x_i)$

***finition :*** $(\Omega, p)$ *Un univers probabiliste fini et X une variable aléatoire définie dans* $\Omega$

•*Esperance mathématique :* $E(X) = \sum_{k=1}^{m} x_k . p(X = x_k)$ • *La variance :* $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

•*L'ecart type :* $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

***i binomiale :***

***finition : (La variable aléatoire binomiale)***

*it n un entier positif et* $p \in [0,1]$

*ı loi de probabilité de la variable aléatoire X définie par :* $\forall k \in \{0;1;2;3 \ldots\ldots;n\}$ $p(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

*t appelée variable aléatoire binomiale de paramètres n et p*

***opriété :(les paramètres d'une variable aléatoire binomiale)***

*it X une variable aléatoire binomiale de paramètres n et p*

• *Esperance mathématique :* $E(X) = n.p$ • *La variance :* $V(X) = np(1-p)$ • *L'ecart type :* $\sigma(X) = \sqrt{V(X}$

# Complèment sur les suites

**I) suites arithmétiques : Soit $I \subset \mathbb{N}$**

1) $(U_n)_{n\in I}$ suite arithmétique $\Leftrightarrow \forall n \in I\ \exists r \in \mathbb{R} : U_{n+1} - U_n = r$ , $r$ est appelé raison de la suite $(U_n)_{n\in I}$

2) $(U_n)_{n\in I}$ suite arithmétique de raison $r \Leftrightarrow \forall n,p \in I\ : U_n = U_p + (n-p)r$

3) a , b et c sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique $(U_n)_{n\in I} \Leftrightarrow b = \dfrac{a+c}{2}$ (b est la moyenne arithmétique de a et c)

**4) Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique :**

$$S = \frac{nbre \text{ de termes}}{2}\left(1^{er}T \text{ de } S + D^{er}T \text{ de } S\right) \quad \left(nbre \text{ de termes} = D^{er} \text{ indice - } 1^{er} \text{ indice} + 1\right)$$

**Application :** $1+2+3+..........+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $1+3+5+........+(2n+1) = (n+1)^2$

5) monotonie et limite d'un suite arithmétique :

- Si $r>0$ alors $(U_n)_{n\in I}$ est croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ • Si $r<0$ alors $(U_n)_{n\in I}$ est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$

**Exemple de suite arithmétique** : $\forall n \in \mathbb{N} : U_n = an + b$ ( $a,b \in \mathbb{R}$) est une suite arithmétique de raison : a

**Remarque** : raison d'une suite arithmétique : $r = \dfrac{U_n - U_p}{n-p}$

**II) suites géométriques : Soit $I \subset \mathbb{N}$**

1) $(U_n)_{n\in I}$ suite géométrique $\Leftrightarrow \forall n \in I\ \exists q \in \mathbb{R} : \dfrac{U_{n+1}}{U_n} = q$ , $q$ est appelé raison de la suite $(U_n)_{n\in I}$

2) $(U_n)_{n\in I}$ suite géométrique de raison $q \Leftrightarrow \forall n,p \in I\ : U_n = U_p \times q^{n-p}$

3) a , b et c sont des termes consécutifs d'une suite géométrique $(U_n)_{n\in I} \Leftrightarrow b^2 = ac$ (b est la moyenne géométrique de a et c)

**4) Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$:**

$$S = 1^{er}T \text{ de } S\left(\frac{1-q^{nbre \text{ de termes}}}{1-q}\right) \quad \left(nbre \text{ de termes} = D^{er} \text{ indice - } 1^{er} \text{ indice} + 1\right)$$

**Application :** $1+q+q^2+...........+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

5) limite de la suite géométrique $(q^n)$ :

| $n$ | $-\infty$ | $-1$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$ | **n'existe pas** | ‖ | **0** | 1 | $+\infty$ |

6) monotonie et limite d'une suite géométrique positive:

- Si $q>1$ alors $(U_n)_{n\in I}$ est croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ • Si $0<q<1$ $(U_n)_{n\in I}$ est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

7) **Produit de termes consécutifs d'une suite géométrique :**

$U_1 \times U_2 \times .........\times U_n = (U_0)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}$ et $q \times q^2 \times q^3 \times ............\times q^n = q^{\frac{n(n+1)}{2}}$

**Remarque** : raison d'une suite géométrique :

$q^{n-p} = \dfrac{U_n}{U_p}$ $(p \leq n)$ si $(U_n)_{n\in I}$ est une suite géométrique positive alors $q = \sqrt[n-p]{\dfrac{U_n}{U_p}}$

**III) $V_n = e^{U_n}$ :**

Si $(U_n)_{n\in I}$ est une suite arithmétique de raison $r$ alors $(V_n)$ est une suite géométrique de raison $e^r$ et on a :

**IV) $V_n = \ln(U_n)$ tel que $(U_n)_{n\in I}$ est une suite strictement positive :**

Si $(U_n)_{n\in I}$ est une suite géométrique de raison $q$ alors $(V_n)$ est une suite arithmétique de raison $\ln(q)$ et on a :

**V) $U_n = an + b + q^n$ $(a,b,q \in \mathbb{R})$**

On a : $U_0 + U_1 + U_2 + \dots\dots + U_n = \frac{an(n+1)}{2} + b(n+1) + \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ( la somme terme à terme )

**VI) $U_{n+1} = f(U_n)$ tel que $f$ est une fonction continue et strict. croissante sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ et $U_0 \in I$ :**

-Si $U_1 > U_0$ alors $(U_n)_{n\in I}$ est croissante et si $U_1 < U_0$ alors $(U_n)_{n\in I}$ est décroissante

- Si $(U_n)_{n\in I}$ est convergente alors pour calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ on résout l'équation $f(x) = x$ :

| $f(x) = x$ | L'équation admet une seule sol : $l$ | L'équa.admet2sol. $\neq$ $l_1$ et $l_2$ Tel que : $l_1 \in I$ et $l_2 \notin I$ | L'équa.admet2sol. $\neq$ $l_1$ et $l_2$ Tel que : $l_1 \in I$ et $l_2 \in I$ |
|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ | $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$ | $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l_1$ | On utilise le signe ou la monotonie de $(U_n)_{n\in I}$ |

**VII) $U_{n+1} = aU_n + b$ et $U_0$ donné ( par exemple ) ( $f(x) = ax + b$ ,fonction affine)**

| | $a = 1$ | $b = 0$ | $a \neq 1$ et $b \neq 0$ |
|---|---|---|---|
| Nature de $(U_n)$ | $(U_n)$ est arith de raison a | $(U_n)_{n\in I}$ est géo de raison a | $(U_n)_{n\in I}$ n'est ni arith.ni géo. |

-Dans le cas $a \neq 1$ et $b \neq 0$ on extrait de $(U_n)_{n\in I}$ une suite géo. $(V_n)$ de raison $a$ tel que : $V_n = U_n - l$ et $l = \frac{b}{1-a}$

**Et donc :** • Dans le cas $-1 < a < 1$ et $b \neq 0$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$ **exemple :**

• Dans le cas $a > 1$ et $b \neq 0$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = signe(V_0)\times\infty$ **exemple :**

**VIII) $U_{n+1} = \frac{aUn+b}{cU_n+d}$** et $U_0$ donné ( par exemple ) avec $c\neq0$ et $ad-bc \neq 0$ ( $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ fonction homographique)

- Si l'éq. $f(x)=x$ admet une seule solution $l$ ,on extrait de $(U_n)$ une suite arith. $(V_n)$ : $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$ $V_n = \frac{\alpha}{U_n - l}$

De raison $r = V_1 - V_0 == \frac{2c}{a+d}$ **et donc** $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$ **exemple :** ( $U_{n+1} = \frac{3Un-4}{U_n-1}$ et $U_0 = 3$ ) et $V_n = \frac{2}{U_n - 2}$

- Si l'éq. $f(x)=x$ admet une deux solutions $\neq$ $l_1$ et $l_2$ ,on extrait de $(U_n)$ une suite géo. $(V_n)$ : $V_n = \frac{U_n - l_1}{U_n - l_2}$

De raison $q = \frac{V_1}{V_0} = \frac{cl_2 + d}{cl_1 + d}$ **et donc :** •Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l_1$ **exple :** ( $U_{n+1} = \frac{7Un+3}{3U_n+7}$ et $U_0 = \frac{7}{3}$ ) et $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 1}$ )

• Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l_2$ **exemple :**

**IX) $V_n = (U_n)^{f(n)}$ avec $(U_n)_{n\in I}$ est une suite strictement positive :**

Pour calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ on utilise la relation : $V_n = e^{\ln(V_n)}$ **exemples** : $U_n = \sqrt[n]{n}$ et $V_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

**X) $U_n = \frac{a^n + b^n}{c^n + d^n}$ avec $(a,b,c,d > 0)$ et $b > a$ et $d > c$ :**

Pour calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ on factorise au numérateur par $b^n$ et au dénominateur par $d^n$ **exemple** : $U_n = \frac{7^n + 3^n}{2^n - 5^{n+1}}$

**XI) $U_n = \frac{\cos P(n)}{n^m}$ et $V_n = \frac{\sin P(n)}{n^m}$** : On a $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$

**XII) $U_n = \frac{n^m}{a^n}$ avec $a > 0$ :** -Si $a > 1$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ et si $0 < a < 1$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

**Exemples** : $U_n = \frac{n^{100}}{2^n}$ et $V_n = \frac{n^{100}}{(0,3)^n}$

# Géométrie dans l'espace : L'espace est menu d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

## Produit scalaire

L'espace est menu d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

☑ $\vec{u}.\vec{v} = xx'+yy'+zz'$

☑ $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx'+yy'+zz'=0$

☑ $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

☑ $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}$

## Produit vectoriel

☑ $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \wedge \vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = \vec{u}\wedge\vec{v}\left(\begin{vmatrix}y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}; -\begin{vmatrix}x & x'\\ z & z'\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}\right)$

☑ l'aire du triangle $ABD$ : $\dfrac{1}{2}\|\vec{AB}\wedge\vec{AD}\|$

☑ l'aire du parallélogramme $ABCD$ : $\|\vec{AB}\wedge\vec{AD}\|$

☑ $A, B, C$ alignés $\Leftrightarrow$ $\vec{AB}\wedge\vec{AC}=0$

☑ $\sin(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}$

## Représentation paramétrique d'une droite

☑ La représentation paramétrique de la droite passant par $A(x_0,y_0,z_0)$ et dirigée par $\vec{u}(a,b,c)$ est :

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

## Equation d'un plan

☑ L'équation du plan passant par $A(x_0,y_0,z_0)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a,b,c)$ est $ax+by+cz+d=0$ où $d=-(ax_0+by_0+cz_0)$

☑ Le vecteur directeur de la droite perpendiculaire au plan $ax+by+cz+d=0$ est $\vec{n}(a,b,c)$

☑ Le vecteur normal au plan $(ABC)$ est $\vec{AB}\wedge\vec{AC}$

## Distance entre deux points

La distance entre $A$ et $B$ est :

$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

## Distance entre point et plan

La distance entre le point $A(x_0,y_0,z_0)$ et le plan $(P)$ $ax+by+cz+d=0$ est :

$$d(A,(P)) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

## Distance entre point et droite

La distance de $M$ à $D(A,\vec{u})$ est :

$$d(M,(D)) = \frac{\|\vec{AM}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

## Sphère

☑ l'équation de la sphère de centre $\Omega(\alpha,\beta,\gamma)$ et de rayon $R$ est $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2$

☑ l'équation de la sphère de diamètre $[AB]$ est $\vec{AM}.\vec{BM}=0$. son centre est le milieu $I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2},\dfrac{y_A+y_B}{2},\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$ de $[AB]$ et son rayon est :

$$R=\frac{AB}{2}=+\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

☑ Si $a^2+b^2+c^2-d>0$ alors :

$x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma z+d=0$

Est l'équation de la sphère de centre $\Omega(\alpha,\beta,\gamma)$ et de rayon $R=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-d}$

telque : $\alpha=\dfrac{coeff(x)}{-2}$ ; $\beta=\dfrac{coeff(y)}{-2}$ et $\delta=\dfrac{coeff(z)}{-2}$

## Intersection:sphère et droite

☑ Pour déterminer , l'intersection de la sphère de centre $\Omega(\alpha,\beta,\delta)$ et de rayon $R$ et la droite $D(A,\vec{u})$ telque $A(x_0,y_0,z_0)$ et $\vec{u}(a,b,c)$ on résout le système :

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \\ (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2 \end{cases}$$

## Intersection:sphèreet plan

☑ On calcule $d=d(\Omega,(P))$

•si $d>R$ (P) ne coupe pas(S) •si $d<R$ (P) coupe (S) selon le cercle de rayon $r=\sqrt{R^2-d^2}$ et de centre H

☑ le centre H du cercle d'intersction de (P) et(S) est la solution du système

$$(*)\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \\ \alpha x+\beta y+\delta z+d=0 \end{cases}$$

•si $d=R$ le plan est tangent à la sphère en un point H,ce point est solution du système : (*)

# COMPLEMENT SUR LES NOMBRES COMPLEXES

## I) FORMES TRIGONOMTRIQUES PARTICULIERES : $\arg(z)=\theta[2\pi]$ $|z|=r$ $z\in\mathbb{C}$

| $bi$ ( b<0 ) | $bi$ ( b>0 ) | $a<0$ | $a>0$ |
|---|---|---|---|
| $\left[-b\ ;\ -\frac{\pi}{2}\right]$ | $\left[b\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ | $[-a\ ;\ \pi]$ | $[a\ ;\ 0]$ |

| $a-ai$ ( a>0 ) | $-a-ai$ ( a>0 ) | $-a+ai$ ( a>0 ) | $a+ai$ ( a>0 ) |
|---|---|---|---|
| $\left[a\sqrt{2}\ ;\ -\frac{\pi}{4}\right]$ | $\left[a\sqrt{2}\ ;\ -\frac{3\pi}{4}\right]$ | $\left[a\sqrt{2}\ ;\ \frac{3\pi}{4}\right]$ | $\left[a\sqrt{2}\ ;\ \frac{\pi}{4}\right]$ |

| $a-ai\sqrt{3}$ ( a>0 ) | $-a-ai\sqrt{3}$ ( a>0 ) | $-a+ai\sqrt{3}$ ( a>0 ) | $a+ai\sqrt{3}$ ( a>0 ) |
|---|---|---|---|
| $\left[2a\ ;\ -\frac{\pi}{3}\right]$ | $\left[2a\ ;\ -\frac{2\pi}{3}\right]$ | $\left[2a\ ;\ \frac{2\pi}{3}\right]$ | $\left[2a\ ;\ \frac{\pi}{3}\right]$ |

| $a\sqrt{3}-ai$ ( a>0 ) | $-a\sqrt{3}-ai$ ( a>0 ) | $-a\sqrt{3}+ai$ ( a>0 ) | $a\sqrt{3}+ai$ ( a>0 ) |
|---|---|---|---|
| $\left[2a\ ;\ -\frac{\pi}{6}\right]$ | $\left[2a\ ;\ -\frac{5\pi}{6}\right]$ | $\left[2a\ ;\ \frac{5\pi}{6}\right]$ | $\left[2a\ ;\ \frac{\pi}{6}\right]$ |

## II) INTERPRETATION GEOMETRIQUE ET ENSEMBLES DE POINTS :

On considère dans le plan associé à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{U}\ ;\vec{V})$ les points : $A(a)$ , $B(b)$ et $M(z)$

| Ensemble de points $M(z)$ | Interprétation géométrique | expression |
|---|---|---|
| Le cercle de centre $A(a)$ et de rayon $r$ | $AM=r$ | $\lvert z-a\rvert=r$ (r > 0) |
| La médiatrice du segment $[AB]$ | $MA=MB$ | $\lvert z-a\rvert=\lvert z-b\rvert$ |
| La droite $(AB)$ privée du point $B$ | Les points A , B et M sont alignés avec $B\neq M$ | $\frac{z-a}{z-b}\in\mathbb{R}$ |
| Le cercle de diamètre $AB$ privé du point $B$ | Le triangle $AMB$ est rectangle en $M$ avec $B\neq M$ | $\frac{z-a}{z-b}\in i\mathbb{R}$ |
| La demi droite $[AC)$ privée du point $A$ tel que $C$ a pour affixe $(a+\cos\theta+i\sin\theta)$ | $\overline{(\vec{U}\ ;\ \vec{AM})}\equiv\theta[2\pi]$ | $Arg(z-a)\equiv\theta[2\pi]$ |

## III) FORME TRIGONOMETRIQUE ET FORME EXPONENTIELLE DE : $\bar{z}$ ET $-z$

| Forme trigonométrique et exponentielle $-z$ | Forme trigonométrique et exponentielle de $\bar{z}$ | Forme trigonométrique et exponentielle de $z$ $\arg(z)=\theta[2\pi]$ $\lvert z\rvert=r$ |
|---|---|---|
| $[r\ ;\ \pi+\theta]=re^{i(\pi+\theta)}$ | $[r\ ;\ -\theta]=re^{-i\theta}$ | $[r\ ;\ \theta]=re^{i\theta}$ |

## IV) CONDITION POUR QU'UN NOMBRE COMPLEXE SOIT REEL ET CONDITION POUR QU'IL SOIT IMAGINAIRE PURE:

**Soit** $z\in\mathbb{C}$

$z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \mathrm{Im}(z)=0\Leftrightarrow \bar{z}=z$

$z\in\mathbb{R}^*\Leftrightarrow Arg(z)=k\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$)

$z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow R_e(z)=0\Leftrightarrow \bar{z}=-z$

$z\in i\mathbb{R}^*\Leftrightarrow Arg(z)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$)

## VI) Ecritures complexes de certaines transformations du plan

1- La translation de vecteur $\vec{u}(a)$ : $z'=z+a$

2- L'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport $k$ : $z'=k(z-\omega)+\omega$

3- La rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle $\alpha$ : $z'=(z-\omega)e^{i\alpha}+\omega$

$$\lim_{0} \frac{\sin(ax)}{bx} = \lim_{0} \frac{\tan(ax)}{bx} = \lim_{0} \frac{\sin(ax)}{\tan(bx)} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{0} \frac{1-\cos x}{x} = 0 \qquad \lim_{0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

---

S.G : $0 < q < 1 \Rightarrow$ décroissante $\Rightarrow \lim_{+\infty} U_n = 0$

$q > 1 \Rightarrow$ croissante $\Rightarrow \lim_{+\infty} U_n = +\infty$

S.A : $r > 0 \Rightarrow$ croissante $\Rightarrow \lim_{+\infty} U_n = +\infty$

$r < 0 \Rightarrow$ décroissante $\Rightarrow \lim_{+\infty} U_n = -\infty$

---

Si $V_n > 0$ alors

- $\frac{V_{n+1}}{V_n} \leq q \; (0 < q < 1) \Rightarrow \lim_{+\infty} V_n = 0$
- $\frac{V_{n+1}}{V_n} \geq q \; (q > 1) \Rightarrow \lim_{+\infty} V_n = +\infty$

---

"$\frac{0}{0}$" ou "$\frac{\infty}{\infty}$" $\Rightarrow \lim_{a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ "Règle de l'hôpital

$$\lim_{+\infty} \frac{\ln(P(x)) \leftarrow +\infty}{Q(x)} = 0$$

$$\lim_{+\infty} \frac{\ln(P(x))}{\ln(Q(x))} = \lim_{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad \lim_{+\infty} \frac{(\ln x)^{p>0}}{x^{q>0}} = 0$$

---

$$\lim_{+\infty} \frac{n^p}{a^n} \begin{cases} 0 & (q > 1) \\ +\infty & (a < 1) \end{cases}$$

$$\lim_{+\infty} \frac{n^{1000}}{a^n} = 0 \quad \text{"car } 3 > 1\text{"}$$

$$y'' + w^2 y = 0 \qquad y(x) \begin{cases} e^{\alpha x}\left(\alpha \cos(wx) + \beta \sin(wx)\right) \\ e^{\alpha x} \cdot \alpha \cos(wx + \beta) \\ e^{\alpha x} \cdot \alpha \sin(wx + \beta) \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{a \cdot U(x) + b}{c \cdot U(x) + d} \Rightarrow f'(x) = \frac{(ad - bc) \cdot U'(x)}{(c \cdot U(x) + d)^2}$$

$$\lim_{\pm\infty} \frac{e^{P(x) \leftarrow +\infty}}{Q(x)} = \pm\infty \qquad \lim_{\infty} Q(x) \cdot e^{P(x) \leftarrow -\infty} = 0$$

$|z - a| = r \longrightarrow \mathscr{C}(A ; r = AM)$

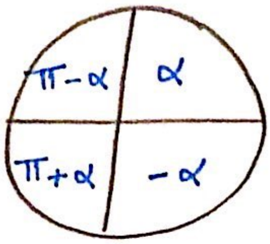
$|z - a| = |z - b| \longrightarrow$ médiatrice de $[AB]$

$\dfrac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R} \longrightarrow (AB)$ dépourvue de $B$

$\dfrac{z-a}{z-b} \in i\mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{C}([AB]) - \{B\}$

$$\frac{a + bi}{b - a} = i \qquad \frac{a - bi}{b + ai} = -i$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Re(Z) > Im(Z) \longrightarrow \frac{\pi}{6} \\ Re(Z) = Im(Z) \longrightarrow \frac{\pi}{4} \\ Re(Z) < Im(Z) \longrightarrow \frac{\pi}{3} \end{array}}$$



$$\sin(a+b) = \sin a \,.\, \cos b + \cos a \,.\, \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \,.\, \cos b - \cos a \,.\, \sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \sin a \,.\, \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \,.\, \cos b + \sin a \,.\, \sin b$$

$$\sin(2x) = 2 \,.\, \sin x \,.\, \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan(a) \,.\, \tan(b)}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan(a) \,.\, \tan(b)}$$

$$\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} = \int_a^b A(x) + \frac{R}{Q_x}\, dx$$

$$\begin{array}{r|l} P(x) & Q(x) \\ \hline \overline{R} & A(x) \end{array}$$

$\deg Q < \deg P$

---

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \left[\ln\left(x^2 + \sqrt{x^2+1}\right)\right]_a^b$$

$$\frac{U'}{U^n} \longrightarrow -\frac{1}{(n-1)\,U^{n-1}}$$

$$U' \cdot \sqrt{U} \longrightarrow \frac{2}{3}\sqrt{U^3}$$

$$\int a^x\, dx = \left[\frac{1}{\ln a}\, a^x\right]$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x + \sin x\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot (\sin x)' + \sin x \cdot x'\, dx$$

$$= \left[x \cdot \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$U'.V + UV' \longrightarrow U \times V$

$$J = \int_0^1 \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}\, dx = \int_0^1 \frac{x^2+x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\, x\, dx$$

$$= \int_0^1 x' \cdot \sqrt{x^2+1} + x \cdot \left(\sqrt{x^2+1}\right)'\, dx$$

$$= \left[x \cdot \sqrt{x^2+1}\right]_0^1$$

---

$$\tan x \longrightarrow -\ln|\cos x|$$

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

$$a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{+\infty} 2^x = e^{x \cdot \ln(2)} = +\infty \\ f(x) = 2^x \Rightarrow f'(x) = \left[e^{x \ln(2)}\right]' \end{cases}$$

$$\lim_{+\infty} x^x = \lim_{+\infty} e^{x \cdot \ln x} = +\infty$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{1}{2}$$

$$z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$$

$$z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$$

$$x^n = a$$

**$a > 0$** — $n$ :

- Imp :
  $x^n = a$
  $x = \sqrt[n]{a}$
- P :
  $|x|^n = a$
  $x = \sqrt[n]{a}$
  $x = -\sqrt[n]{a}$

**$a < 0$** — $n$ :

- Imp :
  $-x^n = -a$
  $(-x)^n = -a$
  $-x = \sqrt[n]{-a}$
  $x = -\sqrt[n]{-a}$
- P :
  $\boxed{\text{Impo}}$

---

Si $\begin{cases} f \text{ dérivable sur } I \\ \text{et} \\ f' \text{ ne s'annule pas sur } I \end{cases}$

alors $f^{-1}$ est dérivable sur $f(I)$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f(x))}$$

---

$$\begin{cases} f(x) = ax + b + h(x) \\ \lim\limits_{\infty} h(x) = cte \end{cases} \Rightarrow y = ax + b + cte \quad \text{A.O}$$

---

$I(a;b)$ centre de symétrie de $\mathcal{D}_f$

$\forall x \in \mathcal{D}_f \qquad 2a - x \in \mathcal{D}_f$

et $\quad f(2a - x) + f(x) = 2b$

| | |
|---|---|
| $\lvert x \rvert \leqslant r$ | $-r \leqslant x \leqslant r$ |
| $\lvert x \rvert < r$ | $-r < x < r$ |
| $\lvert x \rvert \geqslant r$ | $x \leqslant -r$ ou $x \geqslant r$ |
| $\lvert x \rvert \geqslant r$ | $x < -r$ ou $x > r$ |
| $r' \leqslant \lvert x \rvert \leqslant r$ | $-r \leqslant x \leqslant -r'$ ou $r' \leqslant x \leqslant r$ |

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\lim_{0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{0} \frac{\tan(ax)}{ax} = 1$$

$$\lim_{0} \frac{\sin(ax)}{ax} = 1$$

$$\lim_{0} \frac{\tan(ax)}{x} = a$$

$$\lim_{0} \frac{\sin(ax)}{x} = a$$

$$\lim_{0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{-1}{\tan x}$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\tan(\pi - x) = -\tan x$$

$$y' = ay + b \Rightarrow y(x) = k.e^{ax} - \frac{b}{a}$$

$$ay'' + by' + cy = 0$$

- $\rightarrow \Delta > 0 \quad y(x) = A.e^{r_1 . x} + B e^{r_2 x}$
- $\rightarrow \Delta = 0 \quad y(x) = (Ax + B)\, e^{r_0 x}$
- $\rightarrow \Delta < 0 \quad y(x) = e^{\alpha x}\left(A.\cos(\beta x) + B \sin(\beta x)\right)$

$r_1 = \alpha + \beta i \qquad r_2 = \alpha - \beta i$

$$y'' + w^2 y = 0$$

- $\alpha . \cos(wx) + \beta \sin(wx)$
- $\alpha \cos(wx + \beta)$
- $\alpha . \sin(wx + \beta)$

$$y'' - w^2 y = 0 \longrightarrow A.e^{wx} + B e^{-wx}$$

$$y'' + ay' = 0 \longrightarrow A.e^{-ax} + B$$