Theme 1

mercredi 1 février 2023 20:00

2022/2023
Pr: S. El Marri

Résumé
Etude de fonctions et suites numériques

2ème an Bac SM
Beinscience Bac

Branches infinies

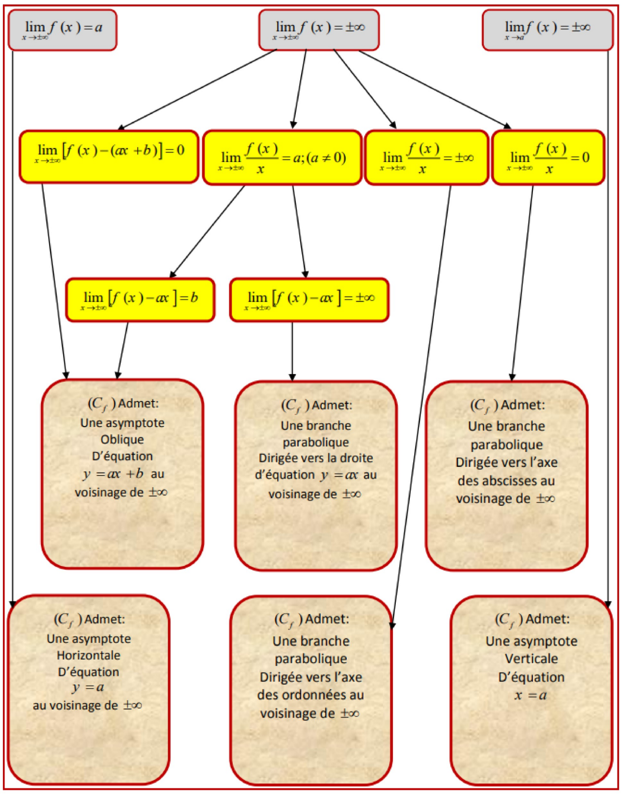

Image d'un intervalle par une fonction continue

1. L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
2. si f continue et strictement croissante sur L'intervalle I et $a \in I$ et $b \in I$ $f([a;b]) = [f(a);f(b)]$ et $f\left(\left[a;b[\right) = \left[f(a);\lim_{\substack{x\to b\\x<b}} f(x)\right[\quad f(]a;b]) =]\lim_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x);f(b)\right]$ et $f(]a;b[) =]\lim_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x);\lim_{\substack{x\to b\\x<b}}(x)[$
3. f continue et strictement décroissante sur L'intervalle I et $a \in I$ et $b \in I$ $f([a;b]) = [f(b);f(a)]$ et $f([a;b[) =]\lim f(x);f(a)]$ $f(]a;b]) = \left[f(b);\lim_{\substack{x\to b\\x<b}} f(x)\right[$ et $f(]a;b[) =]\lim_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x);\lim_{\substack{x\to b\\x>a}} f(x)\Big]$

Théorème des valeurs intermèdiaires

1. Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a et b deux réels de I. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.
2. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction continue et strictement monotone sur [a, b]. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, L'équation $f(x) = k$ a une solution unique dans $[a,b]$. Ces résultats se généralisent à des intervalles du type $[a,b[]a,b],]a,b[,[a,+\infty[]-,\infty,b[,\dots$ en remplaçant $f(a)$ ou $f(b)$ par la limite de f en la borne manquante.
3. Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a,b]$.Si $f(a)f(b) < 0$, l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique dans $[a,b]$.

Théorème de Rolle

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]\,a,b\,[$ et telle que : $f(a) = f(b)$. Alors il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que : $f'(c) = 0$

Theorème des acroissements finis

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ Alors il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

Inégalité des acroissements finis

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ S'ils existent deux réels M et m tels que :

$$m \leq f'(x) \leq M \forall x \in]a;b[$$

Alors: $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

Suites numériques

Rappelle :

	Suite arithmétique	Suite géométrique
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$	$v_{n+1} = qv_n$
Terme général	$u_n = u_p + (n-p)r$	$v_n = v_p \times q^{n-p}$
Relation entre 3 termes Consécutifs a, b et c	$2b = a + c$	$b^2 = ac$
Somme des termes consécutifs	$S = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \frac{(n-p+1)}{2}[u_p + u_n]$	$S = v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n = v_p \frac{1-q^{(n-p+1)}}{1-q} \quad (q \neq 1)$
Variations	(u_n) est croissantes ssi $r \geq 0$ (u_n) est décroissantes ssi $r < 0$	(v_n) est croissantes ssi $q \geq 1$ (v_n) est décroissantes ssi $0 < q < 1$ Si $q < 0$ alors (v_n) n'est pas monotone

Critères de convergence

critère 1 Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites numériques et l un réel.

$$\text{Si} \begin{cases} (\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(|u_n - l| \leq v_n) \\ \lim v_n = 0 \end{cases} \text{alors } \lim u_n = l$$

critère 2

Soient $(u_n)_n$; $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ trois suites numériques et l un réel.

$$\text{Si} \begin{cases} (\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(w_n < u_n < v_n) \\ \lim v_n = \lim w_n = l \end{cases} \text{alors} \quad \lim u_n = l$$

critère 3

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites numériques et l un réel.

$$\text{Si} \begin{cases} (\exists N \subset \mathbb{N})(\forall n > N)(v_n \leq u_n) \\ \lim v_n = +\infty \end{cases} \text{alors } \lim u_n = -\infty$$

critère 4

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites numériques et l un réel.

$$\text{Si} \begin{cases} (\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(u_n \leq v_n) \\ \lim v_n = -\infty \end{cases} \text{ alors } \lim u_n = -\infty$$

critère 5

Soit f une fonction continue sur un intervalle I; et $(u_n)_n$ une suite numérique telle que :

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(u_n \in I)$$

$$\text{Si} \begin{cases} \lim u_n = l \\ f \text{ continue en } l \end{cases} \text{ alors } \lim f(u_n) = f(l)$$

critère 6

Soit f une fonction définie sur un intervalle I; et $(u_n)_n$ une suite numérique telle que : Si :

- f est continue sur I
- $f(I) \subset I$
- $(\forall n \in \mathbb{N})(u_{n+1} = f(u_n))$
- $u_0 \in I$ (donc $(\forall n \in \mathbb{N})(u_n \in I)$
- $(u_n)_n$ est convergente

Alors la suite $(u_n)_n$ tend vers l solution de l'équation $f(x) = x$

critère 7

1. Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$
2. Toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$

Partie :II

1) On pose $\underbrace{J = [1;\alpha]}$ et $(\forall x \in I)$; $\underbrace{\varphi(x) = \ln(1+2x)}$.

a) Montrer que φ est dérivable sur I et $(\forall x \in J)$; $0 < \varphi'(x) \leq \frac{2}{3}$. 0,5 pts

b) Vérifier que : $\varphi(\alpha) = \alpha$ et que $\varphi(J) \subset J$. 0,75 pts

$\varphi(u_n)$

2) On considère la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ définie par: $U_0 = 1$ et $(\forall n \in IN)$; $\underbrace{U_{n+1} = \ln(1+2U_n)}$

a) Montrer que : $(\forall n \in IN)$; $\underbrace{U_n \in J}$. 0,5 pts

b) Montrer que : $(\forall n \in IN)$; $|U_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$. 0,5 pts

c) Montrer que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. 0,5 pts

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(1+2x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases} \qquad I = \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[.$$

$$f(0) = 2$$

1) Mq $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur J.

$$x \longrightarrow \ln(1+2x).$$

$$D\varphi = \{x \in \mathbb{R} / 1 + 2x > 0\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} / x > -\tfrac{1}{2}\}.$$
$$= \left]-\tfrac{1}{2}, +\infty\right[= I.$$

φ est dérivable sur I (comme composé de deux fonctions dérivables à savoir une fonction polynomiale et la fonction logarithme).

Mq $\forall x \in J = [1, \alpha]$, $0 < \varphi'(x) \leqslant \frac{2}{3}$.

$$\forall x \in I, \quad \varphi'(x) = \frac{2}{1+2x} \leftarrow$$

On a: $\forall x \in J$, on a:

$$1 \leqslant x \leqslant \alpha.$$
$$\Rightarrow 2 \leqslant 2x \leqslant 2\alpha$$
$$\Rightarrow 3 \leqslant 1 + 2x \leqslant 1 + 2\alpha$$
$$\Rightarrow \frac{1}{1+2\alpha} \leqslant \underbrace{\frac{2}{1+2x} \leqslant \frac{2}{3}}.$$

De plus, $\forall x \in J = [\underline{1}, \alpha]$,

$$1 + 2x > 0$$

Don ... 2

$1+2x>0$

Donc $\dfrac{2}{1+2x}>0$

Ainsi $\forall x\in J,\quad \boxed{0<\varphi'(x)\leqslant\dfrac{2}{3}}$

b) On a : $f(\alpha)=1 \Leftrightarrow \dfrac{\ln(1+2\alpha)}{\alpha}=1$

$\Leftrightarrow \ln(1+2\alpha)=\alpha.$

$\Leftrightarrow \underbrace{\varphi(\alpha)=\alpha}.$ (α est un pt fixe pour la fct φ).

$$\boxed{\varphi(J)\subseteq J \Leftrightarrow \forall x\in J,\ \varphi(x)\in J.}$$

Soit $x\in J$. Mq $\varphi(x)\in J$. $\qquad J=[1,\alpha]$

$x\in J \Rightarrow 1\leqslant x\leqslant\alpha. \leftarrow$

Or $\forall x\in J,\quad \varphi'(x)>0.$

Donc φ est strictement croissante sur J.

Ainsi $\varphi(1)\leqslant\varphi(x)\leqslant\varphi(\alpha).$

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi(1)&=\ln(1+2\times1)\\&=\ln(3)\end{aligned}}$$

D'où $\ln(3)\leqslant\varphi(x)\leqslant\alpha.$

Donc $1\leqslant\varphi(x)\leqslant\alpha$

Par suite $\varphi(x)\in[1,\alpha]=J.$

$3>e\Rightarrow\ln(3)>\ln(e)$

$\Rightarrow \boxed{\ln(3)>1}$

$$\boxed{\begin{aligned}&\text{Par suite } \forall x\in J,\ \varphi(x)\in J\\&\text{i.e}\quad \varphi(J)\subseteq J\end{aligned}}$$

$\hookrightarrow a<x<b.$

On veut mq $c < x < b$

Il suffit de mq $c \leq a < x$

$\ln(3) \leq f(u)$

Mq $1 \leq f(u)$

Mq $1 \leq \ln(3) \leq f(u)$

$1 \leq \ln(3) \iff e^1 = \boxed{e \leq 3}$

$\begin{cases} e = 2,7\ldots \end{cases}$

$\pi = 3,14\ldots$

$\ln(e) = 1$

$e^1 = e.$

$x > e \iff \ln(x) > 1$

$x > 1 \iff \ln(x) > 0$

2) $u_n = 2n^2 - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

$u_0 = 1, \quad u_{n+1} = f(u_n)$

$u_0 \longrightarrow u_1 = f(u_0)$

$u_{10}.$

$u_1 \longrightarrow u_2$

$u_2 \longrightarrow u_3$

$\vdots$

$u_9 \longrightarrow u_{10}$

* Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 1 \in [1, \alpha] = J.$

* Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, On suppose $U_n \in J$.

$\underline{\underline{Mq}}$ $\boxed{U_{n+1} \in J}$

On a : $U_{n+1} = f(U_n)$

Or $U_n \in J$ et $\boxed{f(J) \subseteq J}$

Ainsi $U_{n+1} = f(U_n) \in J$.

Par suite, $\underbrace{\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \in J}$.

* $P(n_0)$ est vraie.

* $\forall n \in \mathbb{N}$,

$P(n)$ Vraie $\Rightarrow P(n+1)$ Vraie.

$\hookrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \in J \Rightarrow U_{n+1} \in J}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(J) \subseteq J \\ \forall x \in J,\ f(x) \in J \\ x \in J \Rightarrow f(x) \in J \end{array}}$$

$U_n \in J \Rightarrow f(U_n) \in J$

$\Rightarrow U_{n+1} \in J$.

3) Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$a, b \in \mathbb{R}$,

$\hookrightarrow \exists c \in]a, b[\,/\, f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$m \leq f'(x) \leq M \quad \forall x \in]a, b[$.

$\hookrightarrow \quad m \leq f'(c) \leq M$

$\hookrightarrow \quad m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

si $a \neq b$ on peut diviser.

Si $a \neq b$ on peut diviser.

On a : $\forall x \in [1, \alpha]$, $0 < \varphi'(x) \leqslant \frac{2}{3}$.

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < \varphi(\alpha) - \varphi(u_n) \leqslant \frac{2}{3}(\alpha - u_n)$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha - u_{n+1} \leqslant \frac{2}{3}(\alpha - u_n)$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in J = [1, \alpha]$.

i.e $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \alpha$.

i.e $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha - u_n \geqslant 0$.

D'où $|u_n - \alpha| \leqslant \frac{2}{3} |u_n - \alpha|$.

$\forall x \in]a, b[$, $|\varphi'(x)| \leqslant M$.

$\hookrightarrow$ $\left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| \leqslant M$.

$\hookrightarrow$ $\left| \frac{u_{n+1} - \alpha}{u_n - \alpha} \right| \leqslant M$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{2}{3} |u_n - \alpha|$.

Cascade :

$n - 0 + 1 = n + 1.$

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\left.\begin{array}{l} |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3} |\cancel{u_n - \alpha}| \\ |\cancel{u_n - \alpha}| \leq \frac{2}{3} |\cancel{u_{n-1} - \alpha}| \\ \vdots \\ |\cancel{u_1 - \alpha}| \leq \frac{2}{3} |u_0 - \alpha| \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|}$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

$[1, \alpha]$

$\alpha \in [1, 2]$.

Récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

* pour $n = 0$, $|u_0 - \alpha| = |1 - \alpha| = \alpha - 1$

et $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1.$

On a : $1 \leq \alpha \leq 2$

Donc $0 \leq \alpha - 1 \leq 1.$

i.e. $\boxed{|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1}$

* Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\underbrace{|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n}$.

Mq $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.

On sait que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3} \underbrace{|u_n - \alpha|}$.

Donc $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$

i.e $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.

Par suite, $\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

$v_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n |u_n - \alpha|.$

$$v_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n |u_n - \alpha|.$$

$$v_{n+1} - v_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} |u_{n+1} - \alpha| - \left(\frac{3}{2}\right)^n |u_n - \alpha|.$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \left(|u_{n+1} - \alpha| - \frac{2}{3}|u_n - \alpha|\right).$$

$$\leq 0.$$

$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leq v_0.$

$\hookrightarrow$ " , $\quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \underbrace{|u_0 - \alpha|}$

$$\leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

4) On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \boxed{|u_n - \alpha| \leq \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{v_n}}.$

Or $v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ $\quad\left(\text{Car } -1 < \frac{2}{3} < 1\right)$

$\hookrightarrow$ D'après les critères de convergence, $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha$.

$\forall n \in \mathbb{N},$

$|u_{n+1} - \alpha| \leq v_n$

On pose $p = n + 1$.

$|u_p - \alpha| \leq v_{p-1}$

$\forall p \in \mathbb{N}^*.$

$v_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0 \Rightarrow v_{p-1} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$\hookrightarrow (v_{n+1}),\ (v_{n+2}),$

$(v_{n-1}),\ (v_{2n}),\ (v_{2n+1})$

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{\text{Suite extraite}} (v_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ $\quad \varphi \nearrow$