Partie :I

Soit la fonction **f** définie sur l'intervalle $I =]-1/2;+\infty[$ par: $f(0)=2$ et $f(x)=\dfrac{\ln(1+2x)}{x}$; $x \neq 0$

(C_f) est la courbe représentative de **f** dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que f est continue au point 0 . 0,5 pts

2) Pour tout réel non nul **a** de l'intervalle I on considère la fonction numérique f définie sur I par :

$$h_a(x)=(\ln(1+2a)-2a)x^2-(\ln(1+2x)-2x)a^2$$

a) Calculer $h_a(a)$ et $h_a(0)$ en déduire qu'il existe un réel b compris entre 0 et a tel que :

$$\frac{\ln(1+2a)-2a}{a^2}=\frac{-2}{1+2b}$$ 0,5 pts

b) En déduire que la fonction est dérivable au point 0 et que $f'(0)=-2$. 0,75 pts

3) a) Montrer que f est dérivable sur $I-\{0\}$ et que :

$$(\forall x\in I-\{0\})\ ;\ f'(x)=\frac{g(x)}{x^2(1+2x)} \quad \text{avec} \quad \underbrace{g(x)=2x-(1+2x)\ln(1+2x)}$$ 0,5 pts

b) Montrer que : $(\forall x\in I-\{0\})$; $g(x)<0$ 0,5 pts

c) En déduire les variations de la fonction f. 0,25 pts

4) a) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis interpréter géométriquement les résultats obtenus. 0,5 pts

b) Montrer qu'il existe un réel α unique de l'intervalle $[1;2]$ tel que : $f(\alpha)=1$. 0,5 pts

c) Construire la courbe (C_f) (On prend $\alpha\approx1{,}3$)

Partie :II

1) On pose $J=[1;\alpha]$ et $(\forall x\in I)$; $\varphi(x)=\ln(1+2x)$.

a) Montrer que f est dérivable sur I et $(\forall x\in I)$; $0<\varphi'(x)<\frac{2}{3}$. 0,5 pts

b) Vérifier que : $\varphi(\alpha)=\alpha$ et que $\varphi(J)\subset J$. 0,75 pts

2) On considère la suite $(U_n)_{n\geq0}$ définie par: $U_0=1$ et $(\forall n\in\mathbb{N})$; $U_{n+1}=\ln(1+2U_n)$

a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $U_n\in J$. 0,5 pts

b) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $|U_{n+1}-\alpha|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n$. 0,5 pts

c) Montrer que la suite $(U_n)_{n\geq0}$ est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. 0,5 pts

1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+2x)}{x} & \text{si } x\neq0. \\ 2 & \text{si } x=0.\end{cases}$ $\forall x\in\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$.

$$\boxed{f \text{ est continue en } 0 \iff \lim_{x\to0} f(x)=f(0)}$$

(F. I)

On a : $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\underbrace{\dfrac{\ln(1+2x)}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\underbrace{\dfrac{\ln(1+2x)}{2x}}\times2$

On pose $y=2x$.

$=\lim \dfrac{\ln(1+y)}{} \times 2$

$$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.}$$

On pose $y = 2x$.

$$= \lim_{y \to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} \times 2$$

$$= 1$$

$$= 1 \times 2 = 2 = f(0).$$

Donc $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$

Ainsi f est continue en 0.

$h_a(x) = (\ln(1+2a) - 2a)x^2 - (\ln(1+2x) - 2x)a^2$

Soit $a \in I =]-\frac{1}{2}, +\infty[$

2) $\forall x \in I, \quad h_a(x) = (\ln(1+2a) - 2a)\,x^2 - (\ln(1+2x) - 2x)\,a^2.$

$$0 \longrightarrow h_0$$
$$1 \longrightarrow h_1$$
$$2 \longrightarrow h_2.$$

a) $h_a(a) = (\ln(1+2a) - 2a)\,a^2 - (\ln(1+2a) - 2a)\,a^2$

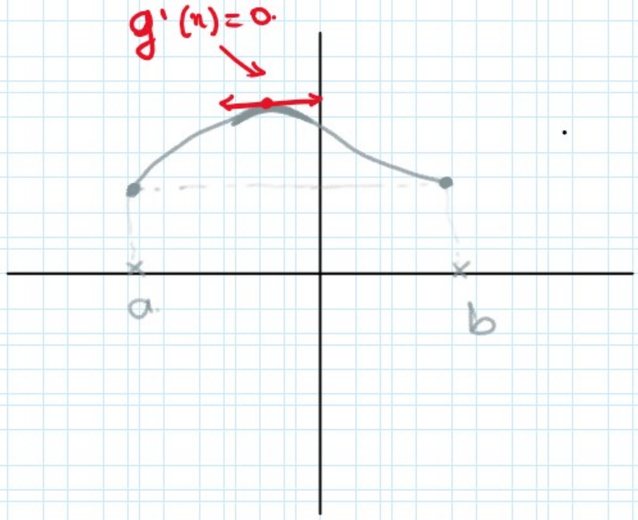
$$= 0.$$

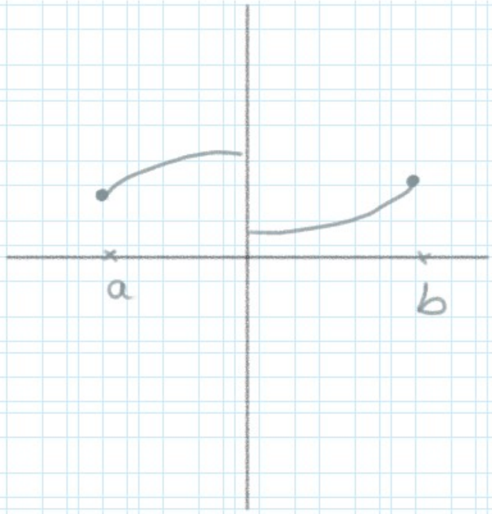
$h_a(0) = (\ln(1+2a) - 2a)\,0^2 - (\ln(1+2\times 0) - 2\times 0)\,a^2$

$$= 0.$$

* g est continue sur $[a, b]$.
* g est dérivable sur $]a, b[$.
* $g(a) = g(b)$

$\xrightarrow{\text{Rolle}} \exists c \in]a, b[\,/\, g'(c) = 0$





* h_a est continue sur l'intervalle fermé de bornes 0 et a.
* h_a est dérivable sur " ouvert ... 0 et a.
* $h_a(0) = h_a(a)$.

D'après le thm de Rolle, il existe b entre 0 et a tel que

$$h_a'(b) = 0.$$

$$h_a'(b) = 0 \iff 2(\ln(1+2a) - 2a)b - a^2\left(\frac{2}{1+2b} - 2\right) = 0.$$

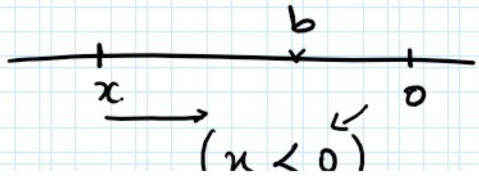
$$\iff \cancel{2}(\ln(1+2a) - 2a)\cancel{b} = a^2 \times \frac{-4\cancel{b}}{1+2b}.$$

$$\iff \boxed{\frac{\ln(1+2a) - 2a}{a^2} = \frac{-2}{1+2b}}.$$

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\ln(1+2x)}{x} - 2}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\ln(1+2x) - 2x}{x^2}}.$$

$$\boxed{\forall a \in \left]-\tfrac{1}{2}, +\infty\right[, \exists\, b \text{ entre } 0 \text{ et } a \,/\, \frac{\ln(1+2a) - 2a}{a^2} = \frac{-2}{1+2b}.}$$



$$\lim \frac{\ln(1+2x) - 2x}{\quad} = \lim \frac{-2}{1+2b}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(1+2x)-2x}{x^2} = \lim_{b\to 0^-} \frac{-2}{1+2b} = -2$$

$x \longrightarrow 0$ $(x<0)$

$\exists\, b \,/\, x<b<0$ tq $\frac{\ln(1+2x)-2x}{x^2} = \frac{-2}{1+2b}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+2x)-2x}{x^2} = \lim_{b\to 0^+} \frac{-2}{1+2b} = -2.$$

$0<b<x.$

Donc $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -2.$

Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0)=-2.$

3) $f(x) = \frac{\ln(1+2x)}{x}$ $\forall x \in I\setminus\{0\}.$

f est dérivable sur $I\setminus\{0\}$ (Comme composé et quotient des fonctions usuelles dérivables sur $I\setminus\{0\}$).

De plus,

$\forall x\in I\setminus\{0\}$, $f'(x) = \frac{\frac{2}{1+2x}\times x - \ln(1+2x)\times 1}{x^2}$

$$= \frac{\frac{2x - \ln(1+2x)(1+2x)}{1+2x}}{x^2}$$

$$= \frac{2x-(1+2x)\ln(1+2x)}{x^2(1+2x)}$$

$$= \frac{g(x)}{x^2(1+2x)}.$$

b)

On a : $\forall x\in I\setminus\{0\}$, $g(x) = 2x-(1+2x)\ln(1+2x).$

g est dérivable sur $I\setminus\{0\}$ (Comme composé, produit et différence des fonctions usuelles dérivables

g est dérivable sur $I \setminus \{0\}$ (comme comp... des fonctions usuelles dérivables sur $I \setminus \{0\}$).

De plus, $\forall x \in I \setminus \{0\}$

$$g'(x) = \cancel{2} - 2\ln(1+2x) - \cancel{(1+2x)} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{1+2x}}$$

$$= -2\underbrace{\ln(1+2x)}$$

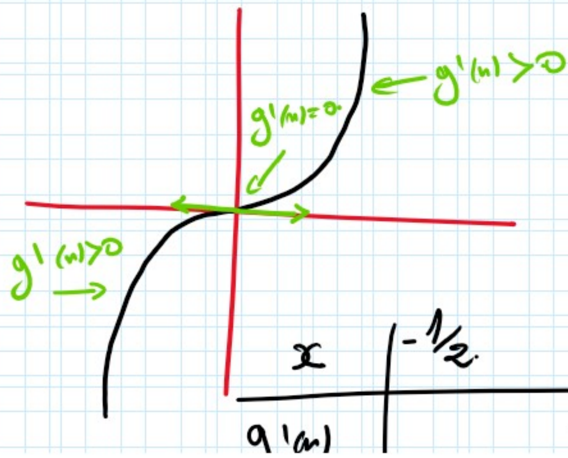
$\boxed{\begin{array}{l} * \ \forall x \in]0,1[, \\ \quad \ln(x) < 0 \\ * \ \forall x \in]1,+\infty[\\ \quad \ln(x) > 0 \\ * \ \ln(1) = 0. \end{array}}$

$$g'(x) = 0 \iff 1 + 2x = 1$$
$$\iff 2x = 0$$
$$\iff x = 0.$$

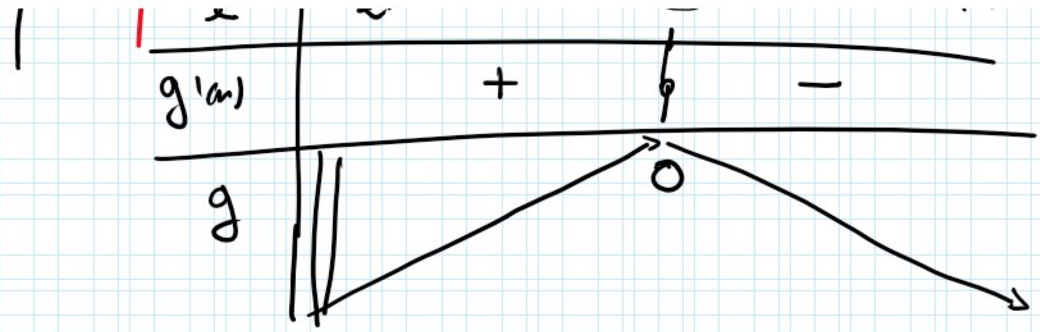
$$\boxed{\begin{aligned} g'(x) > 0 &\iff -2\ln(1+2x) > 0 \\ &\iff \ln(1+2x) < 0 \\ &\iff 1+2x < 1 \\ &\iff 2x < 0 \\ &\iff x < 0 \end{aligned}}$$

$$g'(x) < 0 \iff -2\ln(1+2x) < 0$$
$$\iff \ln(1+2x) > 0$$
$$\iff 1+2x > 1$$
$$\iff 2x > 0$$
$$\iff x > 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} g'(x) > 0 \iff x < 0. \\ g'(x) \leq 0 \iff x \leq 0. \\ g'(x) < 0 \iff x < 0. \end{array}}$$



x	$-1/2$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	



Donc $\forall x \in I \setminus \{0\}$, $g(x) < 0$.

c) On a : $\forall x \in I \setminus \{0\}$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{\underbrace{x^2(1+2x)}}$

$\forall x \in I \setminus \{0\}$, $1+2x > 0$ et $x^2 > 0$ / $I = \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$

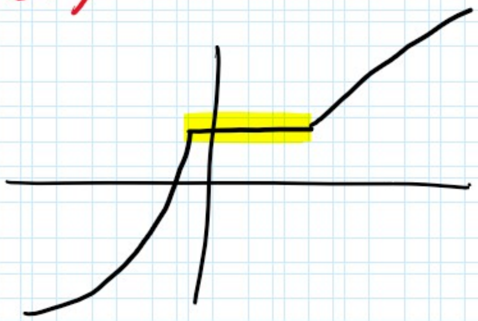
$x > -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x > -1$
$\Rightarrow 2x+1 > 0$

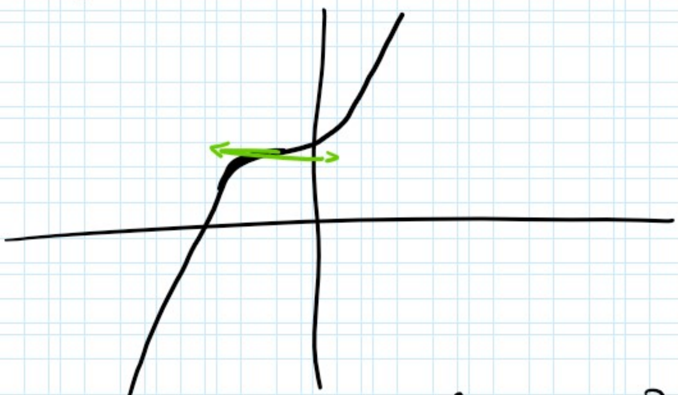
Or $g(x) < 0$, $\forall x \in I \setminus \{0\}$

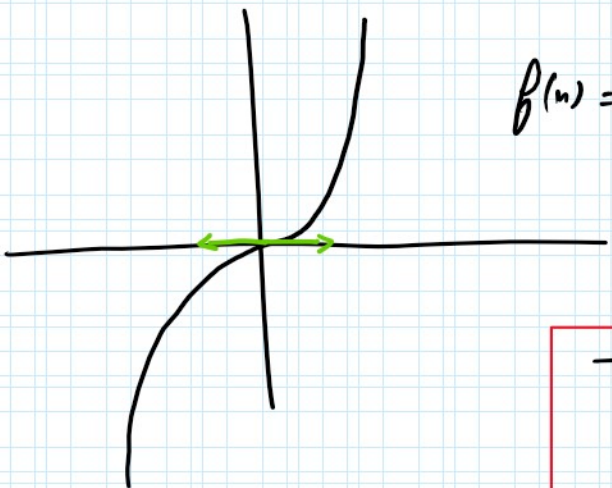
Ainsi $\forall x \in I \setminus \{0\}$, $f'(x) < 0$.

Donc f est strictement décroissante sur I.

Exemple : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = x^2(x-2)^2$.







$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

TAF $\Rightarrow$ * f est continue sur $[a,b]$
* .. dérivable sur $]a,b[$

$\hookrightarrow \exists c \in]a,b[\;/\; f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

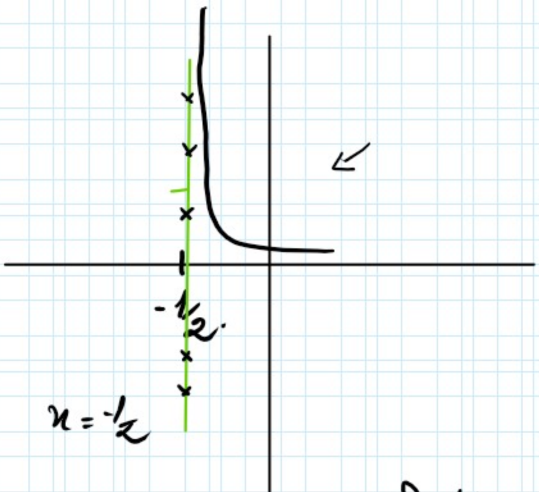
TAF $\Rightarrow$ * f est continue sur $[a,b]$ ←
* .. dérivable sur $]a,b[$. ←

$\hookrightarrow \exists c \in]a,b[\,/\, f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Rolle $\Rightarrow f(a) = f(b)$
$\hookrightarrow \exists c \in]a,b[\,/\, f'(c) = 0$.

4) a) $\lim\limits_{x \to (-\frac{1}{2})^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^+} \dfrac{\ln(1+2x)}{x} = \dfrac{-\infty}{-\frac{1}{2}} = +\infty$.

$\hookrightarrow$ $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -\frac{1}{2}$.



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1+2x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{\dfrac{\ln(1+2x)}{1+2x}} \times \underbrace{\dfrac{1+2x}{x}}$

$= 0 \times 2 = 0$

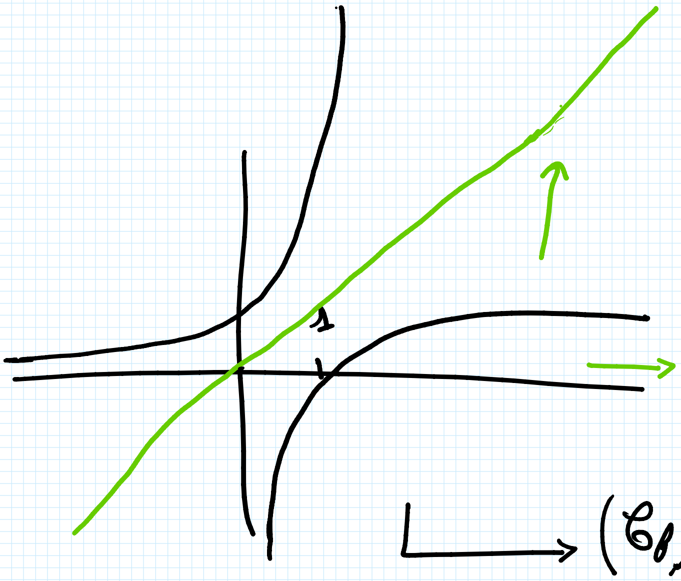
$f \underset{+\infty}{=} o(g) \iff \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

$\dfrac{a}{b} = 0{,}5 \qquad \dfrac{a}{b} = 0{,}1$

$\ln(x) \underset{+\infty}{=} o(x) \iff \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

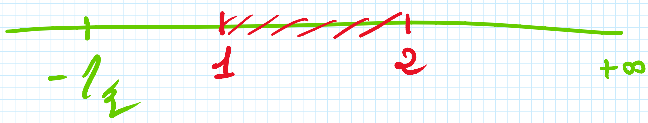
$$x \underset{+\infty}{=} o(e^x) \iff \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

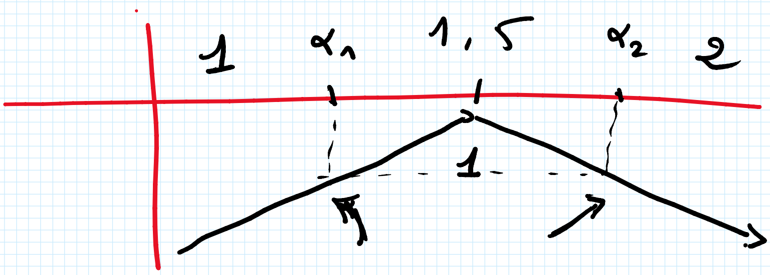
$$\boxed{\begin{array}{c} \ln(x) \underset{+\infty}{=} o(x) \\ x \underset{+\infty}{=} o(e^x) \end{array}}$$

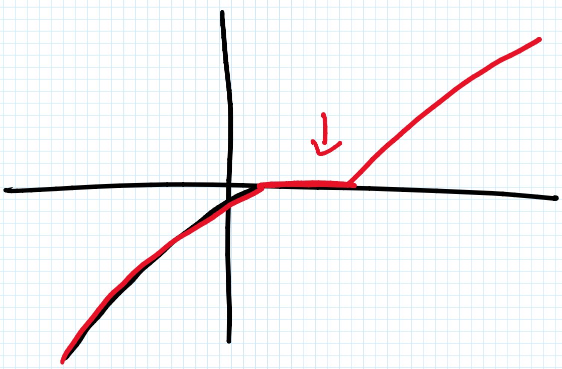


$\hookrightarrow$ $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$ d'équation $y = 0$.

b)







c) Mq $\exists \alpha \in]1,2[\,/\, f(\alpha) = 1$.

c) Mq $\exists \alpha \in]1,2[/ f(\alpha) = 1.$

$$\exists \alpha \in]a,b[/ f(\alpha) = 0.$$

$$\downarrow$$

T.V.I

$$\exists ! \alpha \in]a,b[/ f(\alpha) = 0$$

Existance $\longrightarrow$ T.V.I

+

unicité $\longrightarrow$ f st stri monotone

Biject

f st contin + stri monotone sur $[a,b]$

$\Downarrow$

f défini une bij de $[a,b] \longrightarrow f([a,b])$

$[f(a), f(b)]$ $[f(b), f(a)]$

$0 \in f([a,b])$

$\hookrightarrow \exists ! \alpha \in [a,b] /$

$f(\alpha) = 0.$

$$\exists \alpha \in]a,b[/ f(\alpha) = c$$

$\downarrow$

$\longrightarrow h(x) = f(x) - c.$

$\downarrow$ T.V.I

$\exists \alpha \in]a,b[/ h(\alpha) = 0$

$f(\alpha) - c = 0$

$\hookrightarrow f(\alpha) = c.$

Biject

$c \in f([a,b])$

* On pose. $h(x) = f(x) - 1 \quad \forall x \in [1,2]$

* On pose. $h(x) = f(x) - 1 \quad \forall x \in [1,2]$

* h est continue sur $[1,2]$ (car f est continue sur $[1,2]$)
* $h(1) = f(1) - 1 = \ln(3) - 1 > 0$

$$h(2) = f(2) - 1 = \frac{\ln(5)}{2} - 1 < 0.$$

Donc d'après le T.V.I, $\exists \alpha \in]1,2[\,/\, h(\alpha) = 0$

Or h est dérivable sur $[1,2]$ et

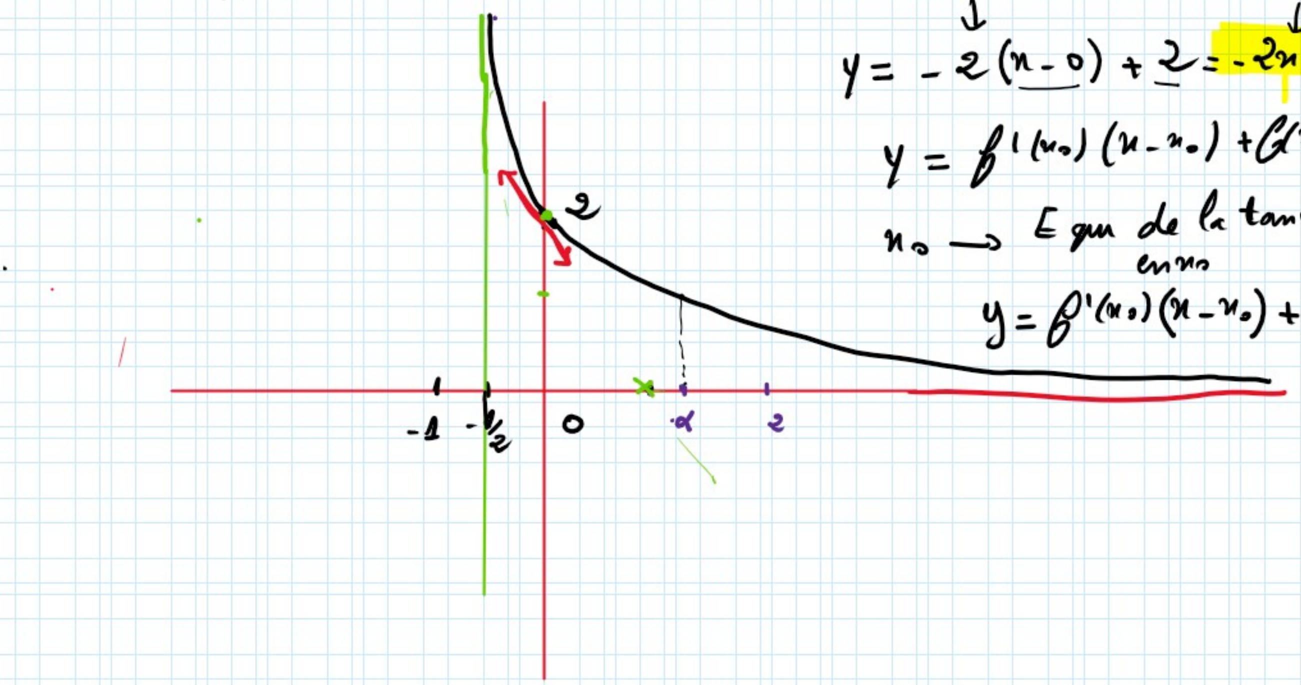
$\forall x \in [1,2]$, $h'(x) = f'(x) < 0.$

Donc h est strictement décroissante.

Ainsi α est unique dans $]1,2[$.

Par suite $\exists ! \alpha \in]1,2[\,/\, h(\alpha) = 0.$

i.e. $\exists ! \alpha \in]1,2[\,/\, f(\alpha) = 1.$

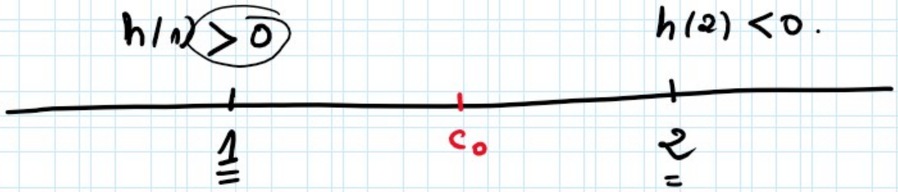


$y = -2(x-0) + 2 = -2x + 2$

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$x_0 \longrightarrow$ Equ de la tangente en x_0

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$



$a = 1, \; b = 2.$

1ère itération : $c_0 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}.$

$$h(c_0) = h\left(\frac{3}{2}\right)$$

$h(c_0) < 0 \longrightarrow \alpha \in]1, c_0[\longrightarrow a = 1, b = c_0$

$h(c_0) > 0 \longrightarrow \alpha \in]c_0, 2[\longrightarrow a = c_0, b = 2.$

ε fixée

$\varepsilon = 10^{-4}$.

$\frac{b-a}{2} < \varepsilon \longrightarrow$ Arrêt.