Données : - Masse du parachutiste et ses accessoires : m = 100 kg

- On considère que l'accélération de la pesanteur est constante : $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$.

Un parachutiste accompagné de ses accessoires saute avec une vitesse initiale négligeable d'un hélicoptère immobile se trouvant à une hauteur h du sol ,. Le parachutiste ouvre son parachute au moment où sa vitesse atteint $52\ m.s^{-1}$ à un instant considéré comme origine des dates. Le système (S) formé par le parachutiste et ses accessoires prend alors un mouvement de translation vertical.

On étudie le mouvement du système (S) dans un repère galiléen $(O,\vec{k})$ lié à la terre, vertical et orienté vers le bas (figure 1).

L'air exerce sur le système (S) une force que l'on modélise, par une force de frottement d'intensité $f = k.v^2$ avec k une constante et v la vitesse du parachutiste .

On néglige la poussée d'Archimède exercée par l'air.

La courbe de la figure 2 représente la variation de la vitesse v en fonction du temps après l'ouverture du parachute.

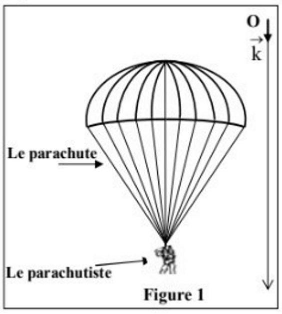


Figure 1

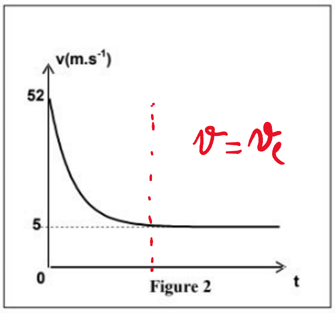


Figure 2

1- Montrer que l'équation différentielle que vérifie la vitesse v s'écrit sous la forme $\frac{dv}{dt} = g.(1 - \frac{v^2}{\alpha^2})$ en précisant l'expression de α en fonction de m, g et k.

2 – Choisir la bonne réponse et justifier :

La grandeur α représente :

a- la vitesse du système (S) à l'instant t=0 .

b- l'accélération du mouvement du système (S) à l'instant t=0.

c- la vitesse limite du système (S) .

d- l'accélération du mouvement du système (S) dans le régime permanent.

3- Déterminer la valeur de α . En déduire la valeur de k en précisant son unité dans le système international .

4- Pour tracer la courbe v(t) de la figure2 on peut utiliser la méthode d'Euler avec un pas de calcul Δt. Soient v_n la vitesse du parachutiste à l'instant t_n , et v_{n+1} sa vitesse à l'instant $t_{n+1}=t_n+\Delta t$ telles que $v_{n+1} = -7{,}84.10^{-2}.v_n^2 + v_n + 1{,}96$ avec v_n et v_{n+1} en $m.s^{-1}$. Déterminer le pas Δt .

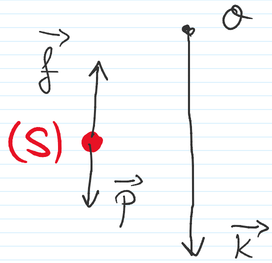
Solution :

1°/ Le système étudié : {S}

Bilan des forces :

$\vec{P}$: Poids

$\vec{f}$: force de frottement



Par application de la 2e loi de Newton :

$$\vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}$$

$$P - f = ma$$

$$mg - kv^2 = m\frac{dv}{dt}$$

$$g - \frac{k}{m}v^2 = \frac{dv}{dt}$$

$$g\left(1 - \frac{k}{mg}v^2\right) = \frac{dv}{dt}$$

$$g\left(1 - \frac{k}{mg} v^2\right) = \frac{dv}{dt}$$

On pose $\alpha = \sqrt{\frac{mg}{k}}$

Donc :

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = g\left(1 - \frac{v^2}{\alpha^2}\right)} \quad 1$$

2°/ Lorsque le régime permanent est établie : $v = v_e \Rightarrow \frac{dv_e}{dt} = 0$

donc ~~on~~ remplace dans 1 :

$$0 = g\left(1 - \frac{v_e^2}{\alpha^2}\right) \Leftrightarrow 1 - \frac{v_e^2}{\alpha^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 = v_e^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha = v_e$$

Donc α est la vitesse limite de (S).

3°/ Graphiquement on a : $v_e = \alpha = 5\ m/s$.

$$\alpha^2 = \frac{mg}{k} \Leftrightarrow k = \frac{mg}{\alpha^2}$$

$$\Leftrightarrow K \overset{A.N}{=} 39{,}2\ Kg/m$$

$$[K] = \frac{N \cdot s^2}{m^2}$$

$$= \frac{Kg \cdot m \cdot s^{-2} \cdot s^2}{m^2} \qquad F = ma$$

$$[K] = Kg/m$$

4°/ On a :

$$v_{n+1} = a_n \Delta t + v_n$$

et :

$$\frac{dv}{dt} = g\left(1 - \frac{V^2}{\alpha^2}\right) \Leftrightarrow a_n = g\left(1 - \frac{V_n^2}{\alpha^2}\right)$$

Donc :

$$\begin{cases} a_n = g\left(1 - \frac{V_n^2}{\alpha^2}\right) \\ v_{n+1} = -7{,}84 \cdot 10^{-3} V_n^2 + V_n + 1{,}96 \end{cases}$$

$$\Delta t = \frac{v_{n+1} - v_n}{a_n}$$

$$= -7{,}84 \cdot 10^{-2} V_n^2 + 1{,}96$$

a_n

$$= \frac{-7{,}84 \cdot 10^{-2} v_n^2 + 1{,}96}{9{,}8\left(1 - \frac{v_n^2}{25}\right)}$$

$$= \frac{-7{,}84 \cdot 10^{-2} \cancel{(v_n^2 - 25)}}{-0{,}392 \cancel{(v_n^2 - 25)}}$$

$$\boxed{\Delta t \simeq 0{,}2\ s}$$