Examen national SM-2017

jeudi 26 janvier 2023 15:32

BeInBac.com

Mécanique :(5,25 points)
Les parties I et II sont indépendantes

Partie I :Etude du mouvement de chute de deux corps

Dans cette partie, on étudie le mouvement de chute de deux corps (A) et (B) dans le repère orthonormé $R(O,\vec i,\vec j)$ lié à un référentiel terrestre supposé galiléen. Le point O est situé au niveau du sol (figure 1).

On néglige la poussée d'Archimède devant les autres forces et on prend l'intensité de la pesanteur : $g=10\,m.s^{-2}$.

1-Etude de la chute d'un corps avec frottement :

A un instant choisi comme origine des dates $(t=0)$, on lâche, sans vitesse initiale d'un point H , un corps solide (A) de masse $m_A=0{,}5\,kg$ et de centre d'inertie G_A (figure 1).

En plus de son poids, le solide (A) est soumis à une force de frottement fluide $\vec f=-k.\vec v_A$ où $\vec v_A$ est le vecteur vitesse de G_A à un instant t et k une constante positive ($k>0$).

0,5 **1-1-** Montrer que l'équation différentielle du mouvement vérifiée par la composante $v_{Ay}(t)$ selon l'axe (Oy) du vecteur vitesse $\vec v_A(t)$ s'écrit :

$$\frac{dv_{Ay}}{dt}+\frac{1}{\tau}v_{Ay}+g=0$$ où τ représente le temps caractéristique du mouvement .

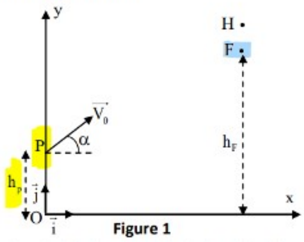


Figure 1

0,5 **1-2-**La courbe de la figure 2 représente l'évolution de $v_{Ay}(t)$ au cours du temps.
Déterminer τ et déduire la valeur de k .

0,5 **1-3-**Déterminer, en utilisant la méthode d'Euler, la vitesse $v_{Ay}(t_i)$ à un instant t_i sachant que l'accélération à l'instant t_{i-1} est $a_{Ay}(t_{i-1})=-4{,}089\,m.s^{-2}$ et que le pas de calcul est $\Delta t=0{,}01\,s$.

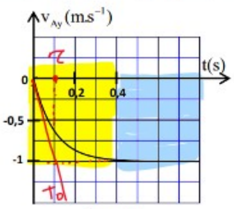
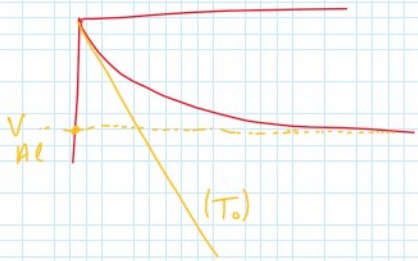


Figure 2



2-Etude du mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur :

A l'instant où le centre d'inertie G_A du corps (A) passe par le point F d'altitude $h_F=18{,}5\,m$ par rapport au sol, on lance un projectile (B), de masse m_B et de centre d'inertie G_B, d'un point P de coordonnées $(0,h_P)$ avec une vitesse initiale $\vec V_0$ faisant un angle α $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$ avec l'horizontale(figure 1). On choisit cet instant comme nouvelle origine des dates $(t=0)$ pour le mouvement de (A) et celui de (B).

On néglige les frottements pour le projectile (B) et on donne : $h_P=1{,}8\,m$; $V_0=20\,m.s^{-1}$.

0,5 **2-1-**Etablir les équations horaires $x_B(t)$ et $y_B(t)$ du mouvement de (B) en fonction de α et t .

0,5 **2-2-**Exprimer les coordonnées du point S, sommet de la trajectoire de (B), en fonction de α .

0,5 **3-**Les deux corps (A) et (B) se rencontrent au point S (on considère que G_A coïncide avec G_B en S). Déterminer l'angle α correspondant sachant que le corps (A) passe par F avec sa vitesse limite et que les mouvements de (A) et (B) s'effectuent dans le même plan (xOy) .

1°/ Etude de la chute verticale d'un corps (A) avec frottement

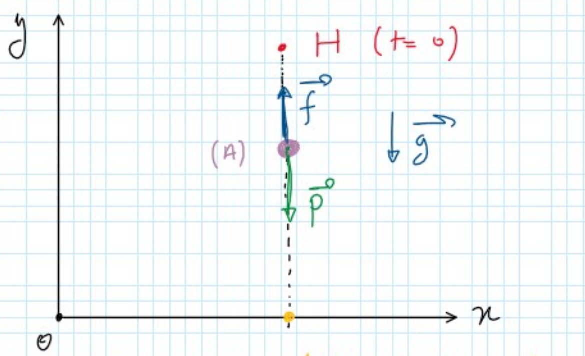
1-1 : Eq diff

• Système étudié : { Corps A }

• Bilan des forces :

· $\vec P = m_A \vec g$: son poids

· $\vec f = -k\vec V_A$: force de frottement fluide



• 2ème loi de Newton : $\sum \vec F_{ext} = m\vec a_{GA} \Rightarrow \vec P + \vec f = m_A \vec a_{GA}$

$$-m_A g \vec j - kV_{Ay}\vec j = m_A \frac{dV_{Ay}}{dt}\vec j$$

∀t $y_A = y_{GA} = f(t)$ et $x_{GA} = cte$

$\vec V_A = V_{Ay}\vec j$ et $\vec a_{GA} = a_{Ay}\vec j = \frac{dV_{Ay}}{dt}\vec j$

proj/Oy : $-m_A g - kV_{Ay} = m_A \frac{dV_{Ay}}{}$

$$\text{proj}/_{Oy} : -m_A g - K V_{Ay} = m_A \frac{dV_{Ay}}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dV_{Ay}}{dt} + \frac{K}{m_A} V_{Ay} + g = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dV_{Ay}}{dt} + \frac{1}{\tau} V_{Ay} + g = 0} \ (1) \quad \text{avec} \ \boxed{\tau = \frac{m_A}{K}}$$

1-2 :

En régime permanent la vitesse est constante : $V_{Ay}(t > 0,4\,s) = -1\,m/s$

$\forall t > 0,4\,s$: D'après (1) : $\cancel{\frac{dV_{Al}}{dt}}^{0} + \frac{1}{\tau} V_{Al} + g = 0 \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{-V_{Al}}{g}}$

$$A.N : \tau = \frac{-(-1)}{10} = 0,1\,s$$

· Déduction de la constante K :

$$\tau = \frac{m_A}{K} \Rightarrow K = \frac{m_A}{\tau} = \frac{0,5}{0,1} = 5\,kg/s$$

$$\begin{cases} f = K v_A \\ [K] = \frac{N}{m.s^{-1}} = \frac{kg.m.s^{-2}}{m.s^{-1}} \\ [K] = kg.s^{-1} \end{cases}$$

1-3 : la méthode d'Euler

$\Delta t = t_{i+1} - t_i = t_i - t_{i-1}$

$$\begin{cases} \text{Eq diff (1)} : a_i = \frac{dv_i}{dt} = A - Bv_i^n \\ (2) : v_{i+1} = v_i + a_i \Delta t \end{cases}$$

on a : $a_{Ay} = \frac{dV_{Ay}}{dt} = -\frac{V_{Ay}}{\tau} - g \Rightarrow \begin{cases} a_{i+1} = -\frac{V_{i+1}}{\tau} - g \\ v_{i+1} = v_i + a_i \Delta t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{i-1} = -\frac{\overline{V_{i-1}}}{\tau} - g & (*) \\ v_i = \underbrace{v_{i-1}} + a_{i-1} \Delta t & (**) \end{cases}$

(?)

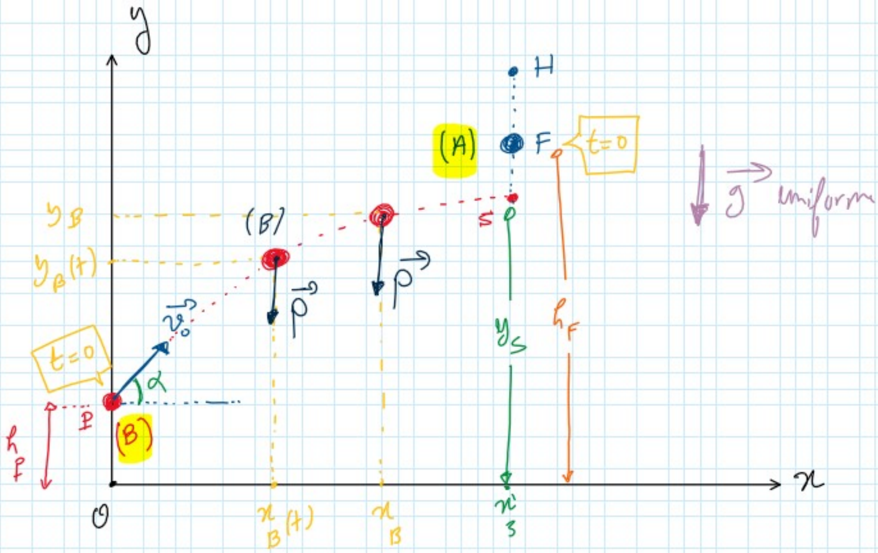
$$(*) \Rightarrow v_{i-1} = -\tau(a_{i-1} + g)$$

$$(**) \Rightarrow [v_i = -\tau(a_{i-1} + g) + a_{i-1} \Delta t]$$

$$A.N \quad v_i = -0,1(-4,085 + 10) - 4,085 \times 0,01 = 0,632\,m/s$$

2°) Etude du mvt d'un projectile dans $\vec{g} = \vec{ct}$

2-1 : Etablissement des équations horaires



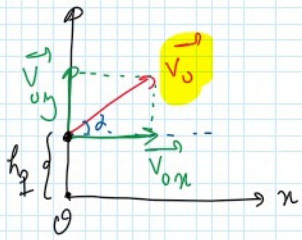
- Système étudié : { Corps (B) }
- Bilan des forces : $\underbrace{\vec{P} = m_B \vec{g} : \text{son poids}}_{\text{Chute libre}}$
- 2ème loi de Newton :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m_B \vec{a}_{GB} \Rightarrow \vec{P} = \cancel{m_B} \vec{g} = \cancel{m_B} \vec{a}_{GB}$$

$\vec{a}_{GB} = \vec{g}$;

$$\text{proj}/_{(Ox)\,et\,(Oy)} : \begin{cases} a_x = \dfrac{dV_x}{dt} = 0 \\ a_y = \dfrac{dV_y}{dt} = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_x = C_1 \\ V_y = -gt + C_2 \end{cases}$$

A t = 0



$$\vec{V}_0 \begin{cases} V_{0x} = V_0 \cos\alpha \\ V_{0y} = V_0 \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow_{t=0} \begin{cases} V_{x_0} = C_1 = V_0 \cos\alpha \\ V_{y_0} = -g \times 0 + C_2 = V_0 \sin\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_x(t) = V_0 \cos\alpha = \dfrac{dx}{dt} \\ V_y(t) = -gt + V_0 \sin\alpha = \dfrac{dy}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B(t) = (V_0 \cos\alpha)t + x_{B0} \\ y_B(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (V_0 \sin\alpha)t + y_{B0} \end{cases}$$

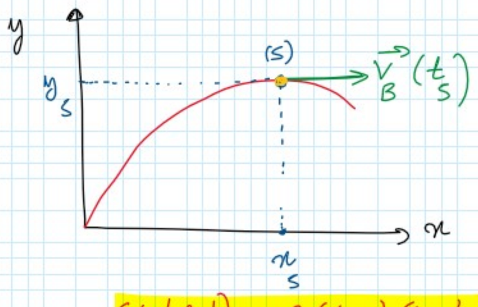
$$A\ t=0 : G_B \equiv P \left| \begin{matrix} x_{B0} = 0 \\ y_{B0} = h_P \end{matrix} \right. \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x_B(t) = (V_0 \cos\alpha)t \\ y_B(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (V_0 \sin\alpha)t + h_P \end{cases}}$$

2-2 Les coordonnées du sommet (S)

Au sommet $S(x_S, y_S)$ on a

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{t_S} = 0 \Rightarrow \left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right) = 0$$

$$\Rightarrow V_y \cdot \frac{1}{V_x} = 0$$



$\sin(2\alpha) = 2\cos\alpha \sin\alpha$

$\Rightarrow V_y \cdot \frac{x}{V_x} = 0$

$\Rightarrow \boxed{V_y(t_s) = 0}$

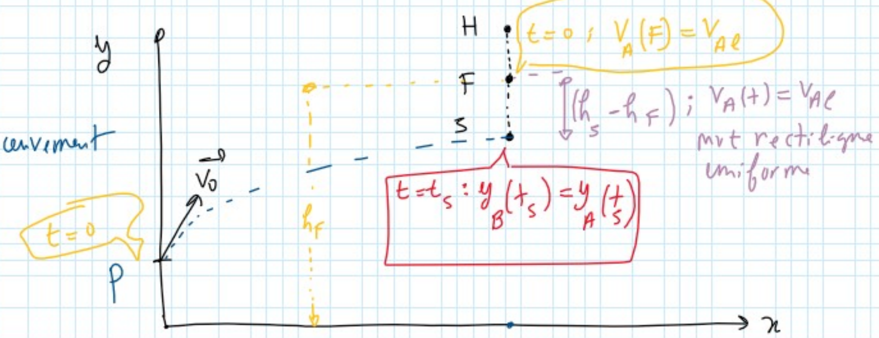
$\sin(2\alpha) = 2\cos\alpha \sin\alpha$

$V_y(t_s) = -g t_s + V_0 \sin\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{t_s = \frac{V_0 \sin(\alpha)}{g}}$ est l'instant de passage de G_B par le sommet (S)

$$\begin{cases} x_B(t_s) = V_0 \cos\alpha \, t_s \\ y_B(t_s) = -\frac{1}{2} g t_s^2 + (V_0 \sin\alpha) t_s + h_p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_s = V_0 \cos\alpha \left(\frac{V_0 \sin\alpha}{g}\right) \\ y_s = -\frac{g}{2}\left(\frac{V_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 + V_0 \sin\alpha \left(\frac{V_0 \sin\alpha}{g}\right) + h_p \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_s = \frac{V_0^2 \sin(2\alpha)}{2g} \\ y_s = \frac{V_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g} + h_p \end{cases} \Rightarrow \text{A.N} \begin{cases} x_s = \frac{(20)^2 \sin(2\alpha)}{2 \cdot 10} = 20 \sin(2\alpha) \ (m) \\ y_s = \frac{20^2}{2 \cdot 10} \sin^2(\alpha) + 1{,}8 = 20 \sin^2(\alpha) + 1{,}8 \ (m) \end{cases}$$

2-3 Détermination de l'angle α pour que $G_A \equiv G_B = S$



- Corps (A) :

En régime permanent, le corps (A) est en mouvement rectiligne uniforme

$V_A(t) = V_{Al} = -1 \, m/s = \frac{dy_A}{dt}$

$y_A(t) = V_{Al} t + y_0$

A $t=0$: $y_A(0) = y_0 = h_F$

$\Rightarrow \boxed{y_A(t) = V_{Al} t + h_F}$

- lorsque les deux corps (A) et (B) se rencontrent au point S : on a $y_B(t_s) = y_A(t_s)$

$y_A(t_s) = V_{Al} t_s + h_F = -1\left(\frac{V_0 \sin\alpha}{g}\right) + h_F = -\frac{20}{10} \sin(\alpha) + 18{,}5 = -2\sin\alpha + 18{,}5$

$y_B(t_s) = y_A(t_s) \Rightarrow 20\sin^2(\alpha) + 1{,}8 = -2\sin\alpha + 18{,}5$

$\Rightarrow \boxed{20 \sin^2(\alpha) + 2\sin(\alpha) - 16{,}7 = 0}$ avec $0 < \alpha < \pi/2$

$\Delta = 2^2 - 4 \times 20 (-16{,}7) = 1340$

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 20\,(-16{,}7) = 1340$$

$$\begin{cases} \sin\alpha_1 = \dfrac{-2+\sqrt{1340}}{2\cdot 20} = 0{,}865 \Rightarrow \alpha_1 = 60° \\[2ex] \sin\alpha_2 = \dfrac{-2-\sqrt{1340}}{2\cdot 20} = -0{,}\cancel{9}65 \Rightarrow \alpha_2 < 0 \end{cases}$$

Donc $\alpha = 60°$ car $0 < \alpha < \pi/2$