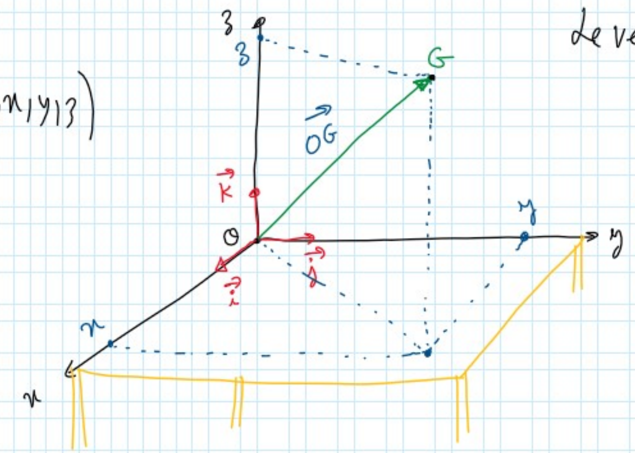
Les lois de Newton

Be In Sciences.org
0675012855

I – Vecteur vitesse et vecteur accélération

$R(O, x, y, z)$



Le vecteur position $\vec{OG} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R$

$\|\vec{OG}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$ Les équations horaires

$\frac{dx}{dt} = \dot{x}$; $\frac{dy}{dt} = \dot{y}$; $\frac{dz}{dt} = \dot{z}$

Le vecteur vitesse instantanée du centre d'inertie G d'un corps (solide)

$$\vec{v}_G = \frac{d\vec{OG}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

$\vec{v}_G = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \Rightarrow v_x = \dot{x}$; $v_y = \dot{y}$, $v_z = \dot{z}$

Ex $\vec{OG} = \begin{cases} x = 2t^2 + 1 \\ y = t - 2 \\ z = a \text{ avec } a = \text{cte} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \dot{x} = 4t \\ v_y = \dot{y} = 1 \\ v_z = \dot{z} = 0 \end{cases}$

Le module du vecteur vitesse

$v_G = \|\vec{v}_G\| = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}$

$= \sqrt{(4t)^2 + 1^2} = \sqrt{16t^2 + 1}$ en m/s

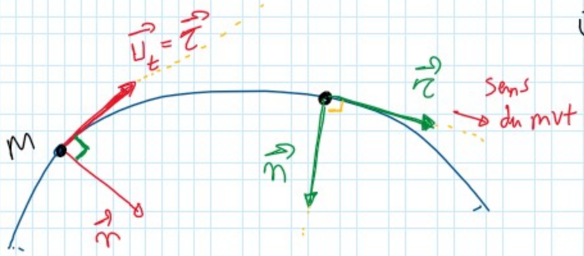
• Le vecteur accélération $(\vec{a}_G = \vec{\gamma}_G = \vec{\Gamma}_G)$

$$\vec{a}_G = \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{OG}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{OG}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}\right) = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

$a_x = \ddot{x}$; $a_y = \ddot{y}$; $a_z = \ddot{z}$

Ex $a_x = 4$; $a_y = 0$; $a_z = 0$; $\|\vec{a}_G\| = \sqrt{(\ddot{x})^2 + (\ddot{y})^2 + (\ddot{z})^2} = \sqrt{4^2} = 4$ m/s²

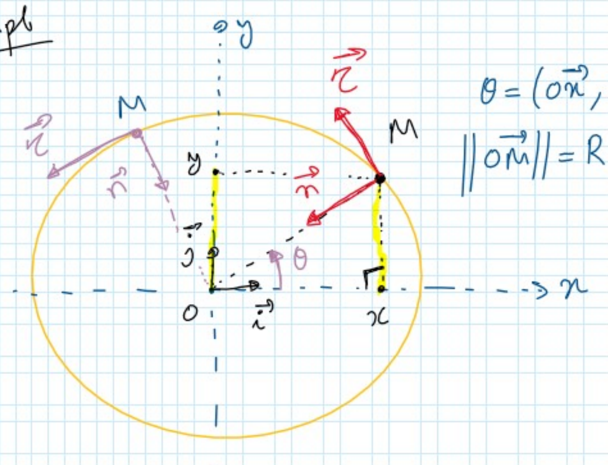
- **repère de Frenet** ⇒ repère Local $\equiv (M, \vec{\tau}, \vec{n})$



$\vec{U_t} = \vec{\tau}$ est tangent

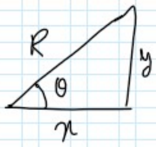
$\vec{n}$: est normal, et dirigé vers le centre de courbure de la trajectoire

Exemple



$\theta = (\vec{Ox}, \vec{OM})$

$\|\vec{OM}\| = R$



$\cos\theta = \frac{x}{R} \Rightarrow \begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$

$\sin\theta = \frac{y}{R} \Rightarrow y = R\sin\theta$

$x^2 + y^2 = R^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = R^2$

$$\boxed{x^2 + y^2 = R^2}$$

$(x-0)^2 + (y-0)^2 = R^2$

Dans le repère de Frenet $\quad \vec{a_G} = a_t \vec{\tau} + a_n \vec{n}$

La composante tangentielle : $a_t = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt}$

" normale $\quad a_n = \frac{\|\vec{v}\|^2}{\rho}$ $\quad$ ρ : est le rayon de courbure de la trajectoire au point M

si la trajectoire est circulaire (cercle) : $\rho = R = $ rayon

II - Les lois de Newton

Pour faire l'étude d'1 syst méc, il faut déterminer le système étudié

Les forces extérieurs

Les forces intérieurs

1°/ La première Loi de Newton : Principe d'inertie

Dans un repère galiléen, si la somme des forces qui s'exercent sur un corps est nulle, alors le vecteur vitesse de son centre d'inertie est constant

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}_G = \vec{ct} \Rightarrow \text{Donc le centre d'inertie } G \text{ est } \begin{cases} \text{soit au repos } \vec{V}_G = \vec{0} \\ \text{soit en mvt rectiligne uniforme} \end{cases}$$

2°/ La deuxième loi de Newton

Dans un repère galiléen, la somme des vecteurs forces qui s'exercent sur un corps est égale au produit de la masse du corps et du vecteur accélération de son centre d'inertie

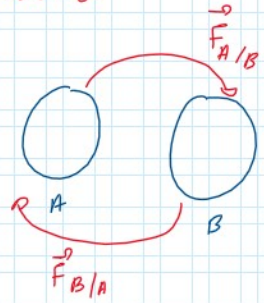
$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}_G}$$

NB : si $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow m\vec{a}_G = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_G = \frac{d\vec{V}_G}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}_G = \vec{ct}$

3°/ La troisième loi de Newton : principe de l'action et de la réaction

Lorsqu'il y a interaction entre deux corps A et B,
le corps A exerce une force $\vec{F}_{A/B}$ sur le corps B et le corps B exerce une force $\vec{F}_{B/A}$ sur le corps A. Ces deux forces sont telles que

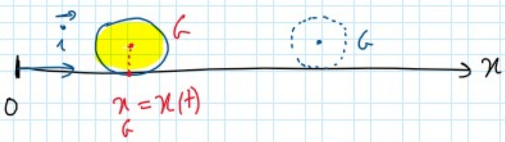
$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$$



$\vec{F}_{A/B} + \vec{F}_{B/A} = \vec{0}$

$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$

III : le mvt rectiligne $\begin{cases} \text{uniforme} \\ \text{uniformément varié} \end{cases}$



$$\vec{OG} = x\vec{i} \Rightarrow \vec{v}_G = \dot{x}\vec{i} \Rightarrow \vec{a}_G = \ddot{x}\vec{i} \Rightarrow \begin{cases} a = a_x \\ a_y = 0 \\ a_z = 0 \end{cases}$$

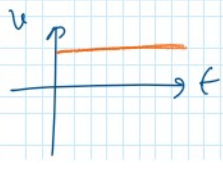
$$\Downarrow \quad \begin{cases} v_x = \dot{x} \\ v_y = 0 \\ v_z = 0 \end{cases}$$

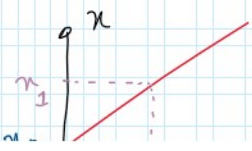
1°/ Mvt rectiligne uniforme

* une trajectoire rectiligne
* une vitesse constante $\vec{V}_G = \vec{ct}$
* une accélération nulle $\vec{a}_G = \vec{0}$

$$\begin{cases} \|\vec{v}_G\| = v = ct = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = v \Rightarrow dx = v\,dt \\ \Rightarrow \int dx = \int v\,dt = v\int dt \Rightarrow \boxed{x(t) = vt + x_0} \end{cases}$$

à $t=0$: $x(t=0) = x_0$ abscisse à l'origine

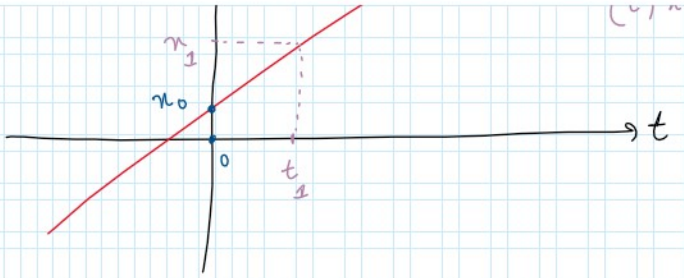




$(t, x) \Rightarrow (t_0, x_0)$; (t_1, x_1)

$v = \frac{\Delta x}{\ldots} = \frac{x_1 - x_0}{\ldots}$

$(t, x) \Rightarrow (t_0, x_0)$; (t_1, x_1)



$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}$$

2°/ mvt rectiligne uniformément varié

* une trajectoire rectiligne

* une accélération constante $\vec{a}_G = \vec{cte}$; $\|\vec{a}_G\| = a$

$$\ddot{x} = a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a\,dt \Rightarrow \boxed{v(t) = at + v_0}$$

à $t=0$ $v(t=0) = v_0$

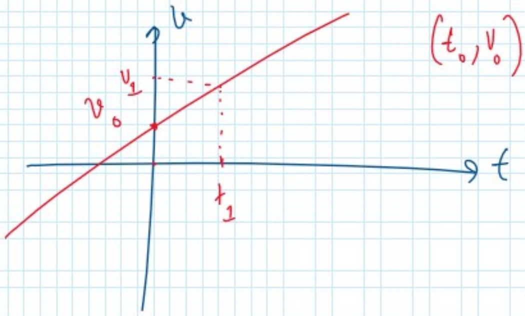
$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v\,dt = (at + v_0)\,dt = at\,dt + v_0\,dt$$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0}$$

l'équation horaire

à $t=0 \Rightarrow x(t=0) = x_0$

abscisse à l'origine



(t_0, v_0) ; (t_1, v_1)

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} \quad (m/s^2)$$

Application de la 2ème Loi de Newton

1°/ on précise le système étudié

2°/ on fait le bilan des forces extérieures qui s'exercent sur le système

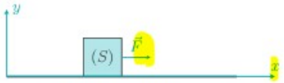
3°/ on représente ces forces

4°/ $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$

5°/ on projète cette relation après avoir choisi un repère

Exercice 1 Cas du mouvement sur un plan horizontal sans frottement :

On considère un corps solide (S) en mouvement sur un plan horizontal sans frottement sous l'action d'une force constante $\vec{F}$ comme l'indique de la figure suivante :

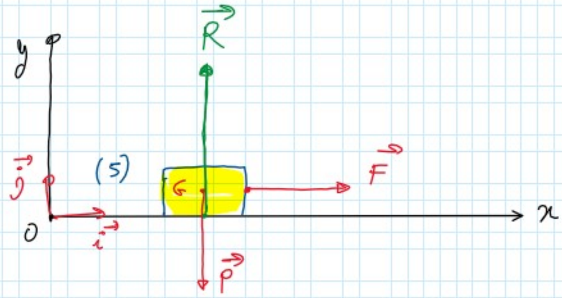


On donne : la masse du corps : $m = 500\text{g}$ l'accélération de pesanteur $g = 10\text{m/s}^2$ et $F = 2\text{N}$.

1. En appliquant la deuxième loi de Newton déterminer l'accélération du corps (S).
2. Sachant que le corps part du point d'abscisse $x = 5\text{cm}$ à $t = 0$ avec une vitesse égale à 3m/s, donner l'équation horaire de son mouvement.

1°/

- Le système étudier : { le Corps S }
- Bilan des forces extériers :
  - $\vec{P}$: poids du Corps
  - $\vec{F}$
  - $\vec{R}$: La réaction du plan ($\vec{R} \perp (Ox)$: le contact se fait sans frottement)



- En appliquant la 2ème Loi de Newton $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G \Rightarrow \boxed{\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{a}_G}$ (1)

$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$: $a_y = 0$ Car il n'y a pas de mouvement selon (Oy)

$\left\{ \vec{P} \begin{vmatrix} P_x = 0 \\ P_y = -P = -mg \end{vmatrix} ; \vec{R} \begin{vmatrix} R_x = 0 \\ R_y = +R \end{vmatrix} ; \vec{F} \begin{vmatrix} F_x = +F \\ F_y = 0 \end{vmatrix} \right.$

on projète la relation (1) dans le repère (O, x, y)

$$\begin{cases} P_x + R_x + F_x = m a_x & \text{proj}/(Ox) \\ P_y + R_y + F_y = m a_y = 0 & \text{proj}/(Oy) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 + 0 + F = m a_x \\ -P + R + 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} a_x = a_G = \dfrac{F}{m} \\ R = P = mg \end{cases}}$$

(A.N) $a = a_G = a_x = \dfrac{2}{500 \cdot 10^{-3}} = 4\text{ m/s}^2 = \text{cte}$

2°/

La trajectoire est rectiligne et l'accélération est Constante selon Ox, donc le mouvement est rectiligne uniformément varié ; l'équation horaire

$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t + x_0$; à $t = 0$ $x_0 = 5\text{cm}$; $V_0 = 3\text{m/s}$

$\dot{x}(t) = at + V_0 = 4t + 3$; (m/s)

$\boxed{x(t) = 2t^2 + 3t + 0{,}005}$ en m

$v(t) = at + V_0 = 4t + 3$ en (m/s)