Exercice 3 : Mécanique (5,5 points) **Les deux parties I et II sont indépendantes**

Partie I : Mouvement d'un skieur

Cette partie de l'exercice décrit un modèle très simplifié du mouvement du centre d'inertie G d'un skieur dans deux phases de son parcours :

-Première phase : Mouvement rectiligne du skieur sur un plan incliné ;
-Deuxième phase : Chute libre du skieur dans le champ de pesanteur uniforme.

Données :- Masse du skieur : $m=60\,kg$;
-Intensité de l'accélération de la pesanteur : $g=9,8\,m.s^{-2}$.
On néglige l'action de l'air.

1-Première phase : mouvement du skieur sur un plan incliné.

On étudie le mouvement du centre d'inertie G du skieur dans le repère $(O;\vec{i}_1;\vec{j}_1)$ lié à un référentiel terrestre considéré galiléen(figure 1).

Pour atteindre le sommet S d'une piste (P) rectiligne inclinée d'un angle $\alpha=23°$ par rapport à l'horizontale, le skieur part du point O sans vitesse initiale à t=0. Il est accroché à un câble rigide faisant un angle $\beta=60°$ avec l'horizontale. Le câble exerce sur le skieur une force de traction $\vec{F}$ constante dirigée selon la direction du câble(figure 1).

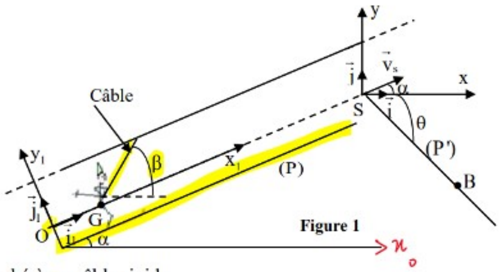


Figure 1

Durant toute cette phase, le skieur reste constamment en contact avec le sol. On note $\vec{R}_T$ et $\vec{R}_N$ respectivement les composantes tangentielle et normale de l'action du plan incliné sur le skieur avec $\|\vec{R}_T\|=k\|\vec{R}_N\|$; k étant le coefficient de frottement solide et $\|\vec{R}_T\|=f=80\,N$.

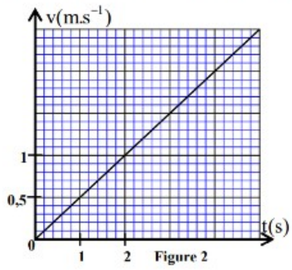


Figure 2

0,5 **1-1-**En appliquant la deuxième loi de Newton, montrer que l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v du centre d'inertie G s'écrit : $\frac{dv}{dt}+\frac{f}{m}+g.\sin\alpha-\frac{F}{m}\cos(\beta-\alpha)=0$.

1-2- La courbe de la figure 2 représente la variation de la vitesse v en fonction du temps.

0,25 **1-2-1-**Déterminer graphiquement la valeur de l'accélération du mouvement de G.

0,25 **1-2-2-** Déduire l'intensité de la force de traction $\vec{F}$.

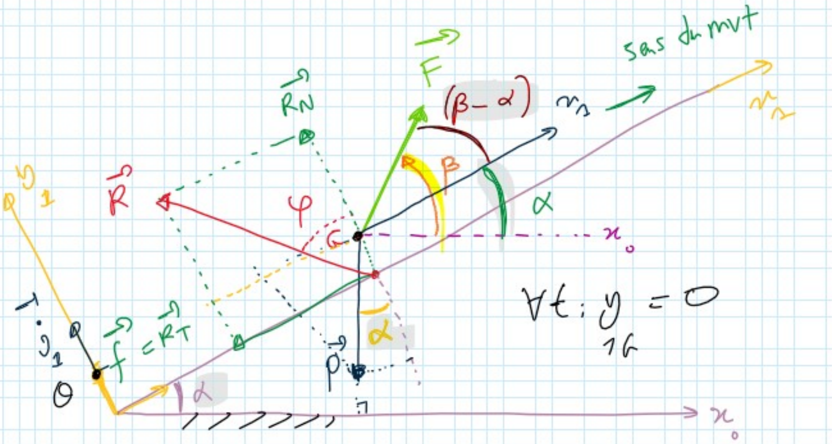
0,5 **1-3-**Déterminer la valeur de k .

1-1 : Système étudié { le skieur ≡ S }

- Bilan des forces :
- $\vec{P}$: son poids
- $\vec{R}$: Action du plan incliné : $\vec{R}=\vec{R}_N+\vec{R}_T$
- $\vec{F}$: La force de traction (Action du câble)

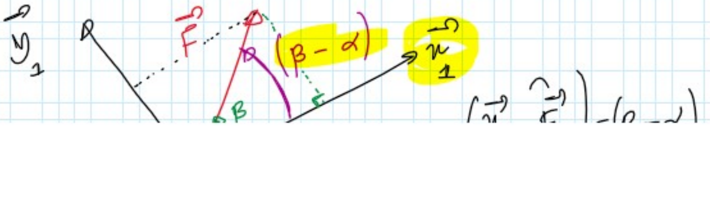
- Application de la 2ème loi de Newton, dans le repère (O, x_1, y_2)

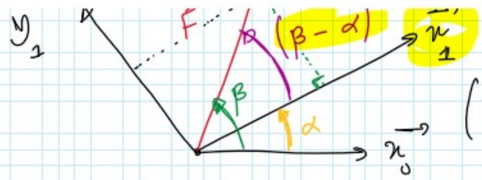
$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$



$\forall t ;\ y_{1G}=0$

$\alpha=(\vec{x}_0,\widehat{\vec{x}_1})$ et $\beta=(\vec{x}_0,\widehat{\vec{F}})$





$$\left(\widehat{\vec{x}_1, \vec{F}}\right) = (\beta - \alpha)$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$$

$$\left(\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{a}_G\right) (1)$$

avec $\vec{P} = \begin{vmatrix} P_{x_1} = -P\sin\alpha \\ P_{y_1} = -P\cos\alpha \end{vmatrix}$; $\vec{R} = \begin{vmatrix} R_{x_1} = -R_T = -f \\ R_{y_1} = R_N \end{vmatrix}$; $\vec{F} = \begin{vmatrix} F_{x_1} = F\cos(\beta-\alpha) \\ F_{y_1} = F\sin(\beta-\alpha) \end{vmatrix}$; $\vec{a}_G = \begin{vmatrix} a_{x_1} = a_G \\ a_{y_1} = 0 \end{vmatrix}$

Proj/ox_1 : $P_{x_1} + R_{x_1} + F_{x_1} = m a_{x_1} \Rightarrow -mg\sin\alpha - f + F\cos(\beta-\alpha) = m a_G = m\dfrac{dv}{dt}$

$$\div m \Rightarrow \boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{f}{m} + g\sin\alpha - \frac{F}{m}\cos(\beta-\alpha) = 0}$$

1-2

1-2-1 La courbe $v = f(t)$ est une fonction linéaire d'équation $v(t) = a_G t$

avec a_G est le coefficient directeur (la pente)

$(0s, 0m/s)$ et $(1s\ ;\ 0,5\,m/s) \Rightarrow a_G = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{0,5-0}{1-0} = 0,5\,m/s^2$

1-2-2

D'après l'équation différentielle ($a_G = \frac{dv}{dt}$)

$$a_G + \frac{f}{m} + g\sin\alpha - \frac{F}{m}\cos(\beta-\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \left[F = \frac{m a_G + mg\sin\alpha + f}{\cos(\beta-\alpha)}\right]$$

A.N

$$F = \frac{60\times0,5 + 60\times9,8\sin(23) + 80}{\cos(60-23)} \simeq 4,25.10^2\,N$$

1-3

Le coefficient de frottement $K = \tan\varphi = \dfrac{R_T}{R_N} = \dfrac{f}{R_N}$

Le coefficient de frottement $K = \tan\varphi = \frac{R_T}{R_N} = \frac{f}{R_N}$

on projete la relation (1) suivant (oy_1)

$$P_{y_1} + R_{y_1} + F_{y_1} = m a_{y_1} = 0$$

$$-mg\cos\alpha + R_N + F\sin(\beta - \alpha) = 0 \Rightarrow \boxed{R_N = mg\cos\alpha - F\sin(\beta - \alpha)}$$

$$\boxed{K = \frac{R_T}{R_N} = \frac{f}{mg\cos\alpha - F\sin(\beta - \alpha)}}$$

A.N $$K = \frac{80}{60 \times 9{,}8 \times \cos(23) - 4{,}25 \times 10^2 \sin(60 - 23)} \simeq 0{,}28$$