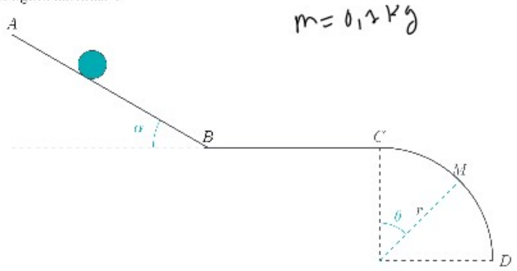
Exercice 5 **Cas d'un mouvement curviligne (Repère de Frenet) :**

Une bille (S) de masse m se déplace sur un un rail $ABCD$, contenant trois portions, comme l'indique la figure suivante :

$m = 0{,}1\,kg$

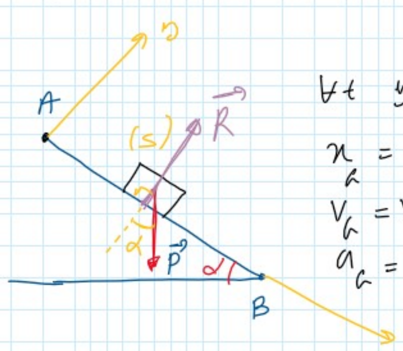


- La portion AB est inclinée d'une angle α où le mouvement se fait sans frottement. $AB = 90cm$ et $\alpha = 30°$.
- La portion $BC = 2cm$ est rectiligne.
- La portion CD est circulaire de rayon r, sur laquelle le mouvement se fait sans frottement.

1. Le corps (S) part du point A sans vitesse initiale.
   1.1. Déterminer l'accélération du corps (S) sur la portion AB puis en déduire du mouvement, on prend $g = 10m/s^2$.
   1.2. Déterminer la vitesse v_B du corps (S) au point B.
2. Sachant que le corps (S) s'arrête au point C et qu'il y a frottement et que la force de frottement est $f = 0,225N$, trouver l'accélération.
3. Le corps (S) continue son mouvement sur le rail CD.
   3.1. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique entre C et M, montrer que l'expression de la vitesse du mobile au point M s'écrit : $v = \sqrt{2gr(1-\cos\theta)}$.
   3.2. Représenter au point M le repère de Frenet $(M, \vec{u}, \vec{n})$ et les forces qui s'exercent sur le corps.
   3.3. En appliquant la deuxième loi de Newton sur le corps (S) au point M et par projection sur la normale $(M, \vec{n})$ montrer que l'intensité de la réaction exercée par le plan de contact sur (S) est : $R = mg(3\cos\theta - 2)$.
   3.4. Sachant que le corps quitte le rail au point M_0 repéré par l'angle θ_0. Déterminer la valeur de θ_0.

1°/ La portion (AB)

- système étudier {le corps (S)}
- Bilan des forces :
  $\vec{P}$: son poids
  $\vec{R}$: la réaction du plan $(\vec{R} \perp \vec{AB})$



$\forall t \quad y_G = cte$
$x_G = x_G(t)$
$V_G = V_x$
$a_G = a_x$

: la 2ème loi de Newton : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G \Rightarrow \left(\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}_G\right)$ (1)

$\vec{a}_G = \begin{cases} a_x = a_G \\ a_y = 0 \end{cases}$ $\quad \vec{R} = \begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = R \end{cases}$; $\quad \vec{P} = \begin{cases} P_x = +mg\sin\alpha \\ P_y = -mg\cos\alpha \end{cases}$

$proj(1)/ox$: $mg\sin\alpha + 0 = ma_x \Rightarrow \boxed{a_x = a_G = g\sin\alpha}$

A.N $a_G = 10\sin(30) = 5\,m/s^2$

La trajectoire est rectiligne et l'accélération est constante selon ox, donc le mouvement est rectiligne uniformément varié (accéléré)

1-2

$V(t) = at + V_0$ et $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t + x_0$

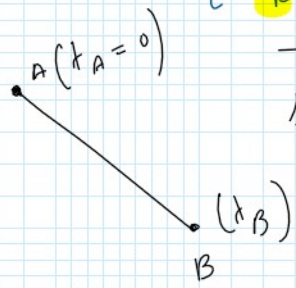
à $t = 0$: $x_0 = x_A = 0$ et $V_0 = V_A = 0$

$$\begin{cases} V(t) = at \\ x(t) = \frac{1}{2}at^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V(t) = 5t \\ x(t) = 2{,}5\,t^2 \end{cases}$$

Au point B $\begin{cases} V_B = 5t_B \\ x_B = 2{,}5\,t_B^2 \end{cases}$; on a $x_B = AB = 2{,}5\,t_B^2 \Rightarrow t_B = \sqrt{\frac{AB}{2{,}5}}$

A.N $t_B = \sqrt{\frac{90.10^{-2}}{2{,}5}} = \ldots$

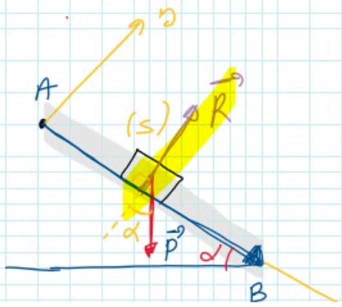
$V_B = 5t_B = 3\,m/s$



$\Delta t = t_B - t_A = t_B$

2ème méthode : Le théorème de l'énergie cinétique

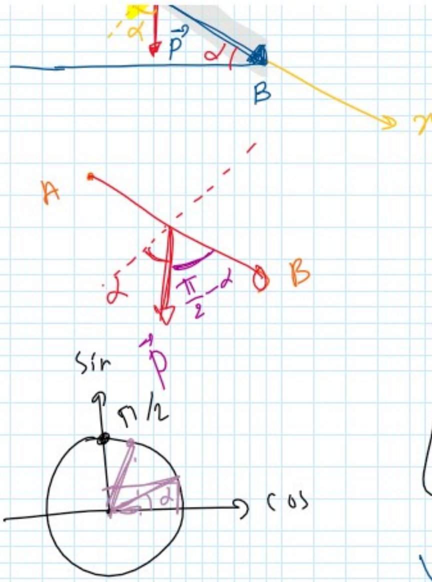
$$\Delta E_C{}_{A\to B} = \sum W_{A\to B}(\vec{F}_{ext}) \Rightarrow E_c(B) - \cancel{E_c(A)} = W_{A\to B}(\vec{P}) + \cancel{W_{A\to B}(\vec{R})}$$



$E_c = \frac{1}{2}mV^2$ on a $V_A = 0 \Rightarrow E_c(A) = \frac{1}{2}mV_A^2 = 0$

$E_c(B) = \frac{1}{2}mV_B^2$

$W_{A\to B}(\vec{R}) = \vec{R}\cdot\vec{AB} = 0$ car $\vec{R} \perp \vec{AB}$



$$W_{A \to B}(\vec{R'}) = \vec{R'} \cdot \vec{AB} = 0 \quad \text{car } \vec{R'} \perp \vec{AB}$$

$$W_{A \to B}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \vec{AB} = \|\vec{P}\| \|\vec{AB}\| \cos(\widehat{\vec{P}, \vec{AB}})$$

$$= mgAB\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\boxed{W_{A \to B}(\vec{P}) = mgAB\sin(\alpha)}$$

$$W_{A \to B}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \vec{AB} = \begin{vmatrix} mg\sin\alpha \\ -mg\cos\alpha \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} AB \\ 0 \end{vmatrix} = mgAB\sin\alpha$$

Th. Ec : $\frac{1}{2}\cancel{m}V_B^2 = \cancel{m}gAB\sin\alpha \Rightarrow \boxed{V_B = \sqrt{2gAB\sin(\alpha)}}$

A.N $\quad V_B = \sqrt{2 \times 10 \times 0{,}9 \times \sin(30)} = 3 m/s$

2/ La portion BC :

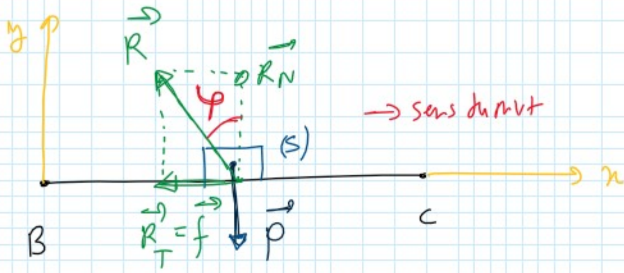
2-1

- système étudier { le corps (S) }

Bilan des forces :

$\vec{P}$: son poids

$\vec{R}$: la réaction du plan $(\vec{R} = \vec{R_N} + \vec{f})$



avec $\vec{P} = \begin{vmatrix} P_x = 0 \\ P_y = -P \end{vmatrix}$; $\vec{R} = \begin{vmatrix} R_x = -f \\ R_y = R_N \end{vmatrix}$

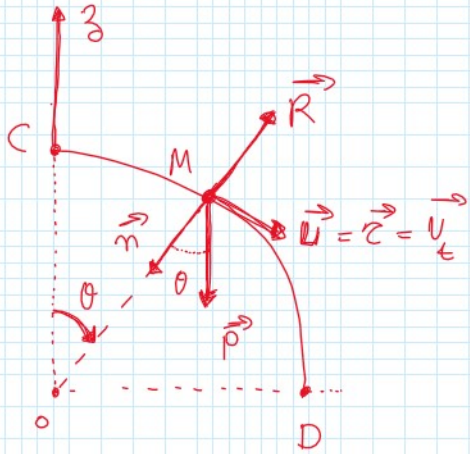
- En appliquant la 2ème loi de newton : $\sum \vec{F_{ext}} = m\vec{a_G}$; $\vec{a_G} = \begin{vmatrix} a_x = a_G \\ a_y = 0 \end{vmatrix}$

$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a_G}$

proj/ox : $0 - f = ma_G \Rightarrow a_G = -\frac{f}{m} = \frac{-0{,}225}{0{,}1} \simeq -2{,}25 m/s^2$

La trajectoire est rectiligne et l'accélération est constante selon ox, donc le mouvement est rectiligne uniformément varié (accéléré)

3°/



3-1 :

- Système étudié : { le corps S }
- Bilan des forces :

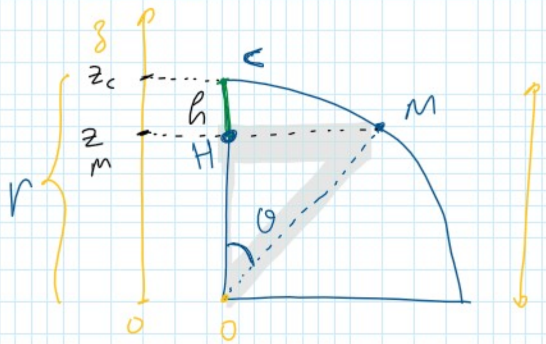
$\vec{P}$: Son poids

$\vec{R}$: La réaction de la portion CD

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique entre C et M

$$\Delta E_{c\,C\to M} = \sum W_{C\to M}(\vec{F}_{ext}) \Rightarrow E_c(M) - E_c(C) = W_{C\to M}(\vec{P}) + W_{C\to M}(\vec{R})$$

$V_C = 0 \Rightarrow E_c(C) = 0$; $E_c(M) = \frac{1}{2} m V_M^2$; $W_{C\to M}(\vec{R}) = \vec{R}\cdot\vec{CM} = 0$



$$W_{C\to M}(\vec{P}) = mg(z_C - z_M) = mgh$$

$$d = z_C - z_M = r - r\cos\theta = r(1-\cos\theta)$$

$$W_{C\to M}(\vec{P}) = mgr(1-\cos\theta)$$

$\cos\theta = \frac{OH}{r} \Rightarrow OH = r\cos\theta$

$OH = z_M = r\cos\theta$

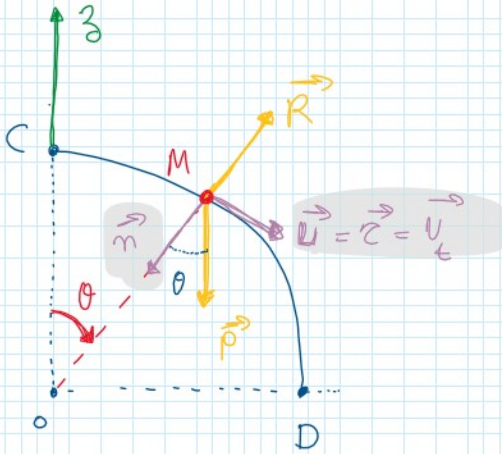
$W_{A\to B}(\vec{P}) = mg(z_A - z_B)$

$$\frac{1}{2}\cancel{m} V_M^2 = \cancel{m} g r(1-\cos\theta)$$

$$\boxed{V_M = \sqrt{2gr(1-\cos\theta)}}$$

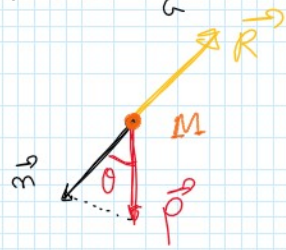
3-2

3-3



- Système étudié : {le corps S}
- Bilan des forces :
  - $\vec{P}$: son poids
  - $\vec{R}$: la réaction de la portion CD

En appliquant la 2ème loi de Newton $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}_G$



proj$/\vec{n}$: $P_n + R_n = m a_n = m \dfrac{V_M^2}{r}$

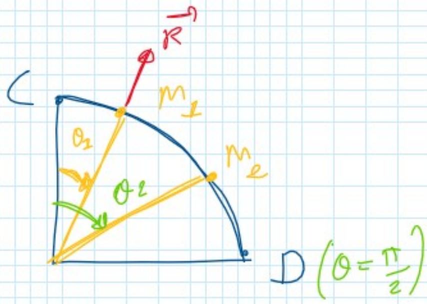
$$mg\cos\theta - R = m\frac{V_M^2}{r}$$

$$R = mg\cos\theta - m\frac{V_M^2}{r}$$

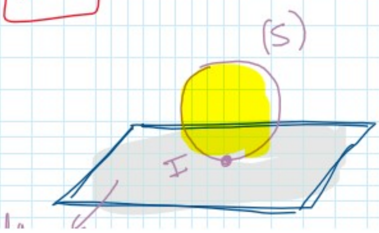
or $V_M^2 = 2gr(1-\cos\theta)$

$$\Rightarrow R = mg\cos\theta - \frac{m}{r}2gr(1-\cos\theta)$$

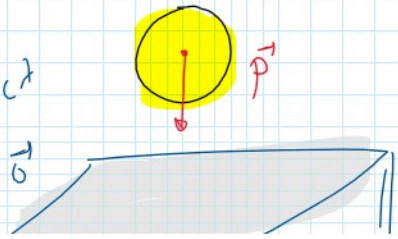
$$\boxed{R = mg(3\cos\theta - 2)}$$

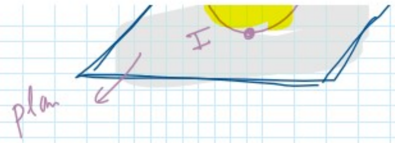


3-4



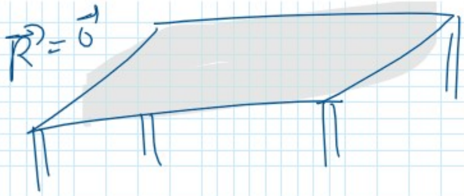
$\begin{cases} \nexists \text{ contact} \\ \vec{R} = \vec{0} \end{cases}$





Contact entre (S) et le plan $\Leftrightarrow \exists\, \vec{R} \neq \vec{0}$

$R > 0$



lorsque le corps (S) quitte le rail (CD), la réaction du plan (l'arc CD) est nulle

$$R = 0 \Rightarrow mg(3\cos\theta - 2) = 0 \Rightarrow 3\cos\theta - 2 = 0$$

$$\cos\theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \simeq 48^\circ$$