Examen-Normal2022

dimanche 22 janvier 2023 18:47

On étudie le mouvement du solide (S) sur le parcours AB dans un repère orthonormé $R(A,\vec{i},\vec{j})$, et son mouvement sur le parcours BC dans un repère orthonormé $R(B,\vec{i}',\vec{j}')$. Les deux repères sont liés à un référentiel terrestre supposé galiléen.

Donnée : - Intensité de la pesanteur $g=10\,m.s^{-2}$.

1- Tronçon AB :

Le long du parcours AB les frottements sont négligeables.

1-1-Calculer la durée t_{AB} du parcours AB.**(0,5pt)**

1-2-Déduire que la valeur de la vitesse de (S) à son arrivée au point B est $V_B=4\,m.s^{-1}$.**(0,25pt)**

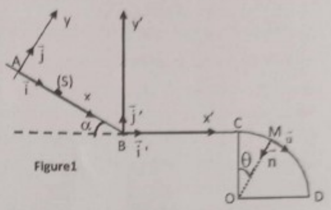


Figure1

2-Tronçon BC :

Le long du parcours BC la force de frottement $\vec{f}$ qui s'applique sur (S) est horizontale , de sens contraire à la vitesse de (S) et d'intensité constante.

On considère que le changement de direction au point B n'a pas d'influence sur la valeur de la vitesse.

Trouver l'intensité f sachant que la durée du parcours BC est $t_{BC}=0,5\,s$ et que (S) arrive en C avec une vitesse nulle.**(0,5pt)**

3-Tronçon CD :

Le long du parcours CD les frottements sont négligeables. Le solide (S) part du point C avec une vitesse pratiquement nulle et aborde le tronçon circulaire CD. La position de G en un point M de CD est repérée par l'angle $\theta=(\overline{OC},\overline{OM})$.

3-1- En se basant sur l'application de la deuxième loi de Newton sur (S) dans la base de Freinet$(M,\vec{u},\vec{n})$ (figure 1) :

3-1-1- Trouver l'expression de R l'intensité de la réaction de la gouttière sur (S) au point M en fonction de m,θ,g ,r et $\dot{\theta}=\frac{d\theta}{dt}$ vitesse angulaire du mouvement de (S).**(0,25pt)**

3-1-2- Exprimer l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ en fonction de g,θ et r.**(0,25pt)**

3-2- A partir de l'expression de $\ddot{\theta}$ on a : $\dot{\theta}=\sqrt{\frac{2g}{r}(1-\cos\theta)}$. En déduire l'expression de R en fonction de m, g et θ. **(0,25pt)**

3-3-Pour quelle valeur de θ le solide (S) quitte la gouttière ? **(0,25pt)**

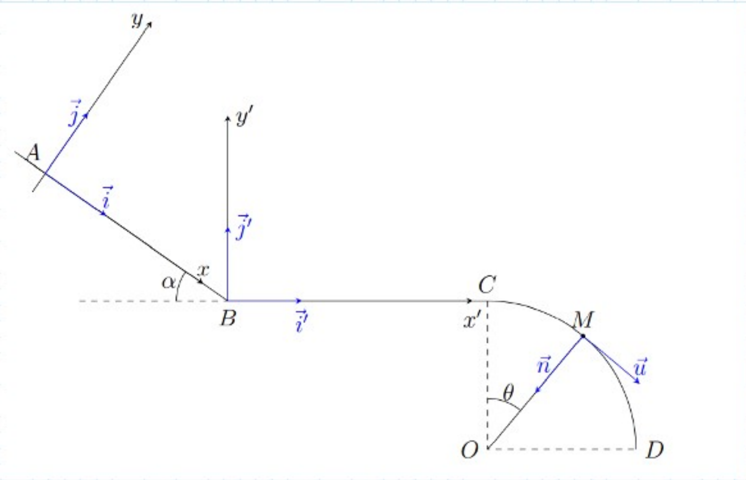
Les deux parties sont indépendantes

Partie I : Mouvement d'un jouet sur une gouttière

Un jouet modélisé par un solide (S) de masse m = 50g et de centre d'inertie G est abandonné sans vitesse initiale en un point A d'une gouttière ABCD(figure1). Cette gouttière est constituée:

- d'un tronçon rectiligne AB incliné d'un angle $\alpha=30°$ par rapport au plan horizontal et de longueur AB = 1,6 m.
- d'un tronçon horizontal BC.
- d'un tronçon circulaire CD de centre O et de rayon r et tel que OC est perpendiculaire à BC.

La trajectoire du mouvement de (S) se trouve dans un plan vertical.



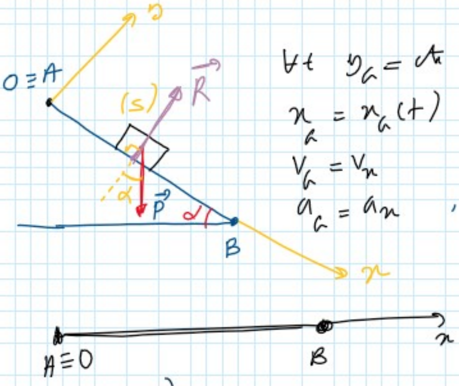
1°//

1°// La portion (AB)

- système étudier {le corps (S)}
- Bilan des forces :

  $\vec{P}$: son poids

  $\vec{R}$: la réaction du plan $(\vec{R} \perp \vec{AB})$



$\forall t \quad y_G = cte$

$x_G = x_G(t)$

$V_G = V_x$

$a_G = a_x$, $\boxed{AB = x_B}$

R : ... du plan ($R \perp AB$)

: la 2ème loi de Newton : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G \Rightarrow (\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}_G)$ ①

$\vec{a}_G = \begin{vmatrix} a_x = a_G \\ a_y = 0 \end{vmatrix} \quad \vec{R} = \begin{vmatrix} R_x = 0 \\ R_y = R \end{vmatrix} \quad ; \quad \vec{P} = \begin{vmatrix} P_x = +mg\sin\alpha \\ P_y = -mg\cos\alpha \end{vmatrix}$

proj(1)/ox : $mg\sin\alpha + 0 = ma_x \Rightarrow \boxed{a_x = a_G = g\sin\alpha}$

Le mouvement de G est rectiligne uniformément varié d'équation horaire

$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t + x_0 \quad$ et $\quad V(t) = at + V_0$

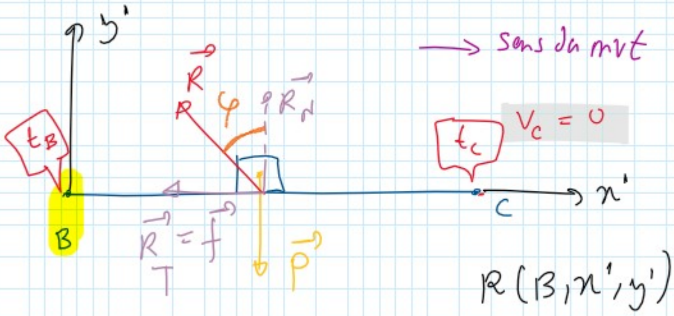
à t_A : $V_0 = V_A = 0$ et $x_0 = x_A = 0 \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}at^2$ et $V(t) = at$

$x_B = AB = \frac{1}{2}at_{AB}^2 \Rightarrow \boxed{t_{AB} = \sqrt{\frac{2AB}{g\sin\alpha}}}$ A.N $t_{AB} \simeq 0,8\,s$

1-2 : $V(t) = at = g\sin(\alpha)\,t$

à $t = t_{AB} = t_B \Rightarrow V_B = g\sin(\alpha)\,t_B = 4\,m/s$

2) Trajet BC



la 2ème loi de Newton : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$

$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}_G$

proj/(Bx') : $0 - f = ma_2 \Rightarrow \boxed{a_2 = -\frac{f}{m}}$

Le mouvement de G est rectiligne uniformément varié d'équation horaire

$x(t) = \frac{1}{2}a_2 t^2 + V_0 t + x_0 \quad$ et $\quad V(t) = a_2 t + V_0 \quad$ avec $V_0 = V_B$ et $x_0 = x_B$

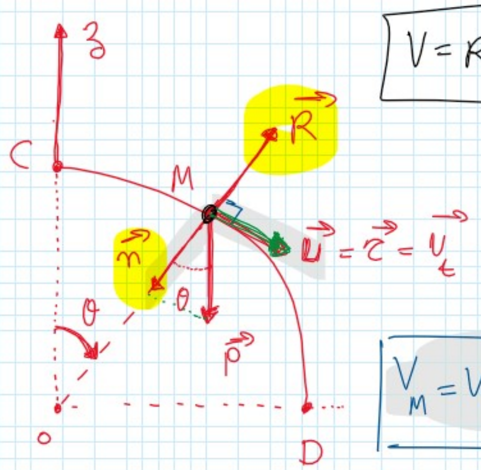
$x(t) = \frac{1}{2} a_2 t^2 + V_0 t + x_0$ et $V(t) = a_2 t + V_0$ avec $V_0 = V_B$ et $x_0 = x_B$

Au point C : $V_C = 0 \Rightarrow V_C = a_2 t_c + V_B = -\frac{f}{m} t_c + V_B = 0$

$$\Rightarrow f = \frac{m V_B}{t_c} = \frac{50 \cdot 10^{-3} \cdot 4}{0,5} \simeq 0,4 N$$

3°//

$\boxed{V = R\omega}$



Application de la 2ème loi de Newton :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \vec{a}_G \Rightarrow \left(\vec{P} + \vec{R} = m \vec{a}_G \right) (1)$$

$$\boxed{V_M = V = r \frac{d\theta}{dt} = r\dot{\theta}}$$

proj(1)$/(M, \vec{n})$: $P_n + R_n = m a_n$

$$mg \cos\theta - R = m \left(\frac{V^2}{r} \right)$$

$$\frac{V^2}{r} = \frac{r^2 \dot{\theta}^2}{r} = r\dot{\theta}^2$$

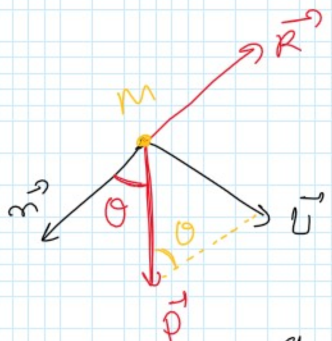
$$\Rightarrow R = m \left(g \cos\theta - \frac{V^2}{r} \right)$$

$$\Rightarrow R = m \left(g \cos\theta - r\dot{\theta}^2 \right)$$

$\vec{P} \begin{vmatrix} P_n = P\cos\theta \\ P_t = P\sin\theta \end{vmatrix}$; $\vec{R} \begin{vmatrix} R_n = -R \\ R_t = 0 \end{vmatrix}$

$\vec{a} \begin{vmatrix} a_n = V^2/r = r\dot{\theta}^2 \\ a_t = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(r\dot{\theta}) = r\ddot{\theta} \end{vmatrix}$

3-1-2 : L'accélération angulaire $\ddot{\theta}$



proj(1)$/(M, \vec{u})$: $P_t + R_t = m a_t$

$$+\cancel{m} g \sin\theta + 0 = \cancel{m} \frac{dv}{dt}$$

$$a_t = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt}$$

$$v = r\dot{\theta}$$

$$g \sin\theta = r\ddot{\theta}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = \frac{g \sin(\theta)}{r}}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} \Rightarrow d\dot{\theta} = \ddot{\theta} dt$$

3-2

$$R = m\left(g\cos\theta - r\dot{\theta}^2\right) \quad \text{et} \quad \dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{r}\left(1-\cos\theta\right)}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} \Rightarrow d\dot{\theta} = \ddot{\theta}\,dt$$

$$\dot{\theta} = \int \ddot{\theta}\,dt$$

$$= \frac{g}{r}\int \sin\theta\,dt$$

$$R = m\left(g\cos\theta - r\,\frac{2g}{r}\left(1-\cos\theta\right)\right)$$

$$R = m\left(g\cos\theta - 2g\left(1-\cos\theta\right)\right)$$

$$\boxed{R = mg\left(3\cos\theta - 2\right)}$$

3-3

lorsque le corps (S) quitte la gouttière (CD), la réaction est nulle

$$R = 0 \Rightarrow mg\left(3\cos\theta - 2\right) = 0 \Rightarrow 3\cos\theta - 2 = 0$$

$$\cos\theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \simeq 48^\circ$$