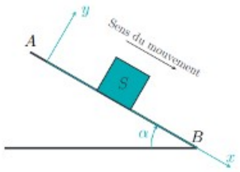
Exercice 3 **Cas du mouvement sur un plan incliné sans frottement :**

On libère un corps (S) de masse $m = 80\text{kg}$ sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontale et il glisse sans frottement vers le bas (voir figure).

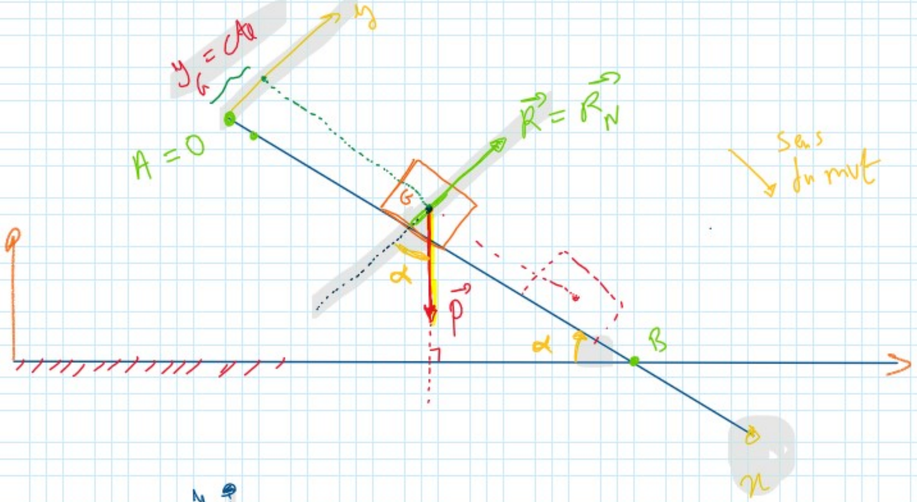


1. En appliquant la deuxième loi de Newton déterminer les coordonnées du vecteur accélération dans le repère (O, x, y) associé à un référentiel terrestre supposé Galiléen, puis déterminer l'intensité de la réaction du plan incliné.
2. Sachant que le corps (S) part à l'instant $t = 0$ du point A avec une vitesse $v_A = 5\text{m/s}$ (A est confondu avec l'origine O du repère d'espace).
   - 2.1. Donner l'équation horaire du mouvement de (S) selon l'axe (Ox) puis l'équation de sa vitesse.
   - 2.2. Déterminer sa vitesse au point B (On donner $AB = 2\text{m}$ et $g = 10\text{m/s}^2$).

1°/ . Le système étudier { le Corps (S) }

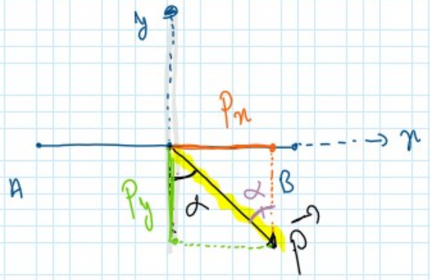
. Bilan des forces : – le poids $\vec{P}$

– $\vec{R}$: La réaction du plan ⊥ au plan, car le contact se fait sans frottement



$$\vec{R} \begin{vmatrix} R_x = 0 \\ R_y = +R \end{vmatrix}$$

$$\vec{P} \begin{vmatrix} P_x = P\sin\alpha \\ P_y = -P\cos\alpha \end{vmatrix}$$



$$\begin{cases} P_x = P\sin\alpha \\ P_y = -P\cos\alpha \end{cases}$$

En appliquant la 2ème loi de Newton : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}_G$

$$\begin{cases} P_x + R_x = m a_x \\ P_y + R_y = m a_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{m} g\sin\alpha + 0 = \cancel{m} a_x \\ -P\cos\alpha + R = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = g\sin\alpha \\ R = P\cos\alpha = mg\cos\alpha \end{cases}$$

(Car $a_y = 0$)

$$(\text{car } a_y = 0)$$

A.N

$$a_x = 10 \sin(30) = 5\ m/s^2$$

$$R = 80 \cdot 10 \cos(30) = 692{,}8\ N$$

2°)

2-1

La trajectoire est rectiligne et l'accélération est constante selon ox, donc le mouvement est rectiligne uniformément varié. L'équation horaire

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0}$$

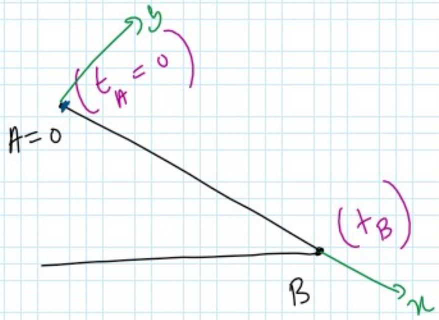
À $t = 0$ $x_0 = 0$ et $v_0 = 5\ m/s$

$a = a_x = 5\ m/s^2$

$$\boxed{x(t) = 2{,}5 t^2 + 5t}$$

$$v(t) = v_x = \dot{x} = at + v_0 = 5t + 5$$

2-2



$x_A = x_0 = 0$

$x_B = AB = 2m$

$$\begin{cases} x_B = 2{,}5 t_B^2 + 5 t_B \\ v_B = 5 t_B + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = 2{,}5 t_B^2 + 5 t_B \\ v_B = 5 t_B + 5 \end{cases}$$

$2{,}5 t_B^2 + 5 t_B - 2 = 0$; $\Delta = 5^2 - 4 \times 2{,}5 \times (-2) = 45 > 0$

$t_B = \dfrac{-5 \pm \sqrt{45}}{2 \times 2{,}5}$; $t_B = \dfrac{-5 + \sqrt{45}}{2 \times 2{,}5}$

$$\Rightarrow v_B = 5\left(\frac{-5+\sqrt{45}}{2\times 2,5}\right)+5 = 6,7\ m/s$$

2ème méthode

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique entre A et B

$$\Delta E_{C\,A\to B} = \sum_{A\to B} \vec{W}(\vec{F}_{ext}) \Rightarrow E_C(B) - E_C(A) = W_{A\to B}(\vec{R}) + W_{A\to B}(\vec{P})$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}V_B^2 - \frac{1}{2}\cancel{m}V_A^2 = \underbrace{\vec{R}\cdot\vec{AB}}_{0} + \vec{P}\cdot\vec{AB} = \cancel{m}g\,AB\sin\alpha$$

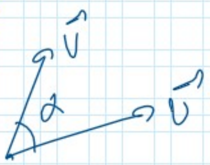
car $\vec{R} \perp \vec{AB}$

$$\vec{P} = \begin{vmatrix} P_x \\ P_y \end{vmatrix} \; ; \; \vec{AB} = \begin{vmatrix} AB \\ 0 \end{vmatrix} \; ; \; W_{A\to B}(\vec{P}) = P_x\cdot AB + P_y \times 0 = mg\,AB\sin\alpha$$

$$V_B^2 = V_A^2 + 2g\,AB\sin\alpha$$

$$V_B = \sqrt{V_A^2 + 2g\,AB\sin\alpha} = 6,7\ m/s$$

Rappel



$$\vec{U}\cdot\vec{V} = \underbrace{\|\vec{U}\|\times\|\vec{V}\|}\cos(\widehat{\vec{U},\vec{V}})$$

si $\vec{U} \perp \vec{V} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \vec{U}\cdot\vec{V} = 0$

$$\vec{U} \parallel \vec{V} \begin{array}{l} \nearrow \alpha = 0 \\ \searrow \alpha = \pi \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \vec{U}\cdot\vec{V} = +\|\vec{U}\|\cdot\|\vec{V}\| \text{ si } \alpha = 0 \\ \vec{U}\cdot\vec{V} = -\|\vec{U}\|\|\vec{V}\| \end{cases}$$