# FONCTIONS - *Généralités*

## 1) Définitions et Domaine de définitions

**à°) Définition :** Une fonction est une relation qui a un nombre $x$ appartenant à un ensemble D associe un nombre y : On note : x $\overset{f}{\mapsto}$ y ou encore $f : x \mapsto y$
Ou encore $y = f(x)$
On dit que y est l'image de x par la fonction f et que x est un antécédent de y par la fonction f

**b°) Domaine de définitions :** Pour une fonction f donnée, l'ensemble de tous les nombres réels qui ont une image par cette fonction est appelé ensemble de définition de la fonction f, que l'on notera $D_f$

## 2) Egalité de deux fonctions – Représentations graphique

**a)Egalité de deux fonctions :** Soient f et g deux fonctions, et $D_f$ et $D_g$ leurs domaines de définition respectifs. On dit que f et g sont égaux et on écrit f=g. si et seulement si : $D_f = D_g$ et pour tout :
$x \in D_f$ (ou $x \in D_g$) on a f(x)=g(x)

**b) Représentations graphique**
Soit f une fonction , et $D_f$ son domaine de définition l'ensemble des points M $(x, f(x))$ forme la courbe représentative de la fonction $f$, souvent notée $C_f$ .
$C_f = \{M(x, f(x)) / x \in D_f\}$

## 3) Fonctions paires et Fonctions impaires

**a) Fonction paire :** On dit qu'une fonction $f$ est paire si et seulement si :
- si Pour tout $x$ de $D_f$ si $x \in D_f$, alors $-x \in D_f$
- Pour tout réel $x$ de $D_f$ on a **: *f(-x) = f(x)***

**b) Fonction impaire**
On dit qu'une fonction f est impaire si et seulement si :
- si Pour tout $x$ de $D_f$ si $x \in D_f$, alors $-x \in D_f$
- Pour tout réel $x$ de $D_f$, on a : ***f(-x) = -f(x)***

**c) le graphe et la parité de la fonction**
- la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par à l'axe des ordonnées.
- la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

## 4) Les variations d'une fonction numérique

1)Soit f une fonction et $D_f$ son domaine de définition et soit $I$ un intervalle inclus dans $D_f$

- Dire f que est strictement croissante sur $I$ ( croissante sur $I$ ) signifie que :
Si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tq $x_1 \prec x_2$ alors $f(x_1) \prec f(x_2)$
$(f(x_1) \leq f(x_2))$
*Rq : Une fonction croissante « conserve l'ordre ».*

- Dire f que est strictement décroissante sur $I$ ( décroissante sur $I$ ) signifie que :
Si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tq $x_1 \prec x_2$ alors $f(x_1) \succ f(x_2)$
$(f(x_1) \geq f(x_2))$
*Rq : Une fonction décroissante « inverse l'ordre ».*

- Dire f que est constante sur $I$ signifie que :
Si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tq $x_1 \prec x_2$ alors $f(x_1) = f(x_2)$

- Une fonction définie sur un intervalle $I$ est monotone sur cet intervalle si elle est : soit croissante sur $I$ soit décroissante sur $I$
- On dit que f est constante sur $I$ ssi il existe un réel $k$ tq: $f(x) = k$ pour tout $x \in I$

**b) Le taux d'accroissement d'une fonction et les variations :**
Soit f une fonction définie sur un intervalle $I$
- On dit que f est strictement croissante(croissante) sur $I$ ssi pour tout $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ et $x_1 \neq x_2$ on a $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \succ 0$ $\left(\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0\right)$
- On dit que f est strictement décroissante(décroissante) sur $I$ ssi pour tout $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ et $x_1 \neq x_2$ on a $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \prec 0$ $\left(\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq 0\right)$
- On dit que f est constante sur $I$ ssi pour tout $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ et $x_1 \neq x_2$ on a $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = 0$

**c) les variations et la parité :**
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}^+$ et soit $I'$ le symétrique de l'intervalle $I$
Si f est paire alors :
- f est croissante sur $I$ ssi f est décroissante sur $I'$
- f est décroissante sur $I$ ssi f est croissante sur $I'$

Si f est impaire alors :
- f est croissante sur $I$ ssi f est croissante sur $I'$
- f est décroissante sur $I$ ssi f est décroissante sur $I'$

Si f est paire ou impaire alors il suffit d'étudier ses variations sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$ et en déduire ses variations sur $D_f$

## 5) Les extremums d'une fonction numérique

**1)Définitions :** Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert $I$ et soit $a \in I$

- Dire que $f(a)$ est une valeur maximale de f sur $I$ (ou $f(a)$ est un maximum de f sur $I$ ) ssi pour tout que $x \in I : f(x) \leq f(a)$
- Dire que $f(a)$ est une valeur minimale de f sur $I$ (ou $f(a)$ est un minimum de f sur $I$ ) ssi pour tout $x \in I : f(x) \geq f(a)$

## 6) Etude et représentation graphique des fonctions $x \xrightarrow{f} ax^2$

Soit f une fonction numérique tq : $f(x) = ax^2$ ; $a \in \mathbb{R}^*$
et puisque f est une fonction paire alors f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$

Tableau de variations de f si $a \succ 0$

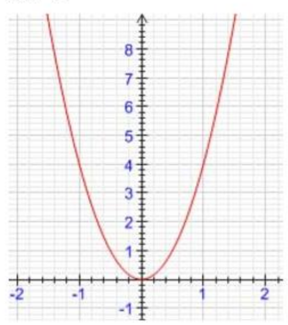
| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $0$ | ↗ $+\infty$ |

Tableau de variations de f si $a \prec 0$

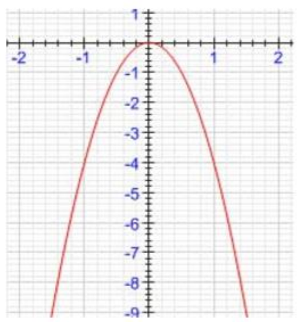
| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ ↗ | $0$ | ↘ $+\infty$ |

dans un Repére orthonormé $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe représentative de la fonction $x \xrightarrow{f} ax^2$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ s'appelle une parabole dont les éléments caractéristiques sont son sommet qui est l'origine du repére et son axe de symétrie qui est l'axe des ordonnées

Si a > 0



Si a < 0



## 7) Etude et représentation graphique des fonctions $x \xrightarrow{f} ax^2 + bx + c$

Soit f une fonction numérique tq : $f(x) = ax^2 + bx + c$
Avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$
1° On a $f$ est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

2° Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ on peut écrire sous la forme :

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

Avec $\Delta = b^2 - 4ac$ et $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{\Delta}{4a}$
et s'appelle la forme canonique de $f(x)$
Dans le repére $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe $(C_f)$ c'est une parabole de sommet $W(\alpha;\beta)$ et d'axe de symétrie la droite $x = \alpha$

3° Les variations de $f$

Si $a \succ 0$

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ↘ | $\beta$ | ↗ |

Si $a \prec 0$

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ↗ | $\beta$ | ↘ |

## 8) Etude et représentation graphique des fonctions : $x \xrightarrow{f} \frac{a}{x}$ $(a \in \mathbb{R}^*)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$

a) Tableau de variations de f

si $a \succ 0$

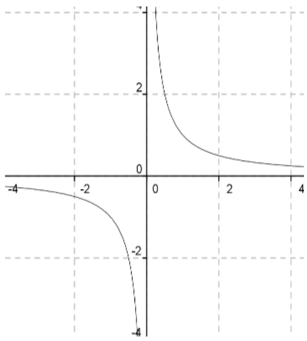
| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ↘ | ‖ | ↘ |

si $a \prec 0$

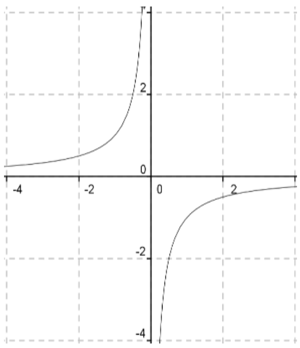
| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ↗ | ‖ | ↗ |

b) la courbe représentative de la fonction f s'appelle une hyperbole
c)Les éléments caractéristiques sont :
-son centre de symétrie est l'origine du repére
- ces deux asymptotes sont l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées

si $a \succ 0$



si $a \prec 0$



## 9) Etude et représentation graphique des fonctions homographique : $x \xrightarrow{f} \frac{ax+b}{cx+d}$ $a \neq 0$ et $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$

f est une fonction homographique

- Pour $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ on a $f(x) = \beta + \frac{\gamma}{x-\alpha}$

dite forme réduite de $f(x)$

• Soit $W(\alpha;\beta)$ Donc dans le repére $(W;\vec{i};\vec{j})$ l'équation de $(C_f)$ est $Y=\frac{\gamma}{X}$ avec $Y=y-\beta$ et $X=x-\alpha$ donc $(C_f)$ est une hyperbole de centre $W$ et d'asymptotes l'axe des abscisse et l'axe des ordonnées

• dans le repére $(O;\vec{i};\vec{j})$ $(C_f)$ est l'hyperbole de centre $W$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x=\alpha$ **et** $y=\beta$

**1iér cas :** si $\det f=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc\succ 0$

Tableau de variations de f :

| $x$ | $-\infty$ $\quad -\frac{d}{c}$ $\quad +\infty$ |
|---|---|
| $f(x)$ | $\nearrow$ ‖ $\nearrow$ |

**2iér cas :** si $\det f=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc\prec 0$

Tableau de variations de f :

| $x$ | $-\infty$ $\quad -\frac{d}{c}$ $\quad +\infty$ |
|---|---|
| $f(x)$ | $\searrow$ ‖ $\searrow$ |

## 10) Position relative de courbes, interprétation graphique d'équations et d'inéquations

Le but de ce chapitre est de pouvoir déterminer par le calcul, entre 2 courbes, quelle courbe se situe au-dessus de l'autre et sur quel(s) intervalle (s).

### a) Position relative de deux courbes et intersection

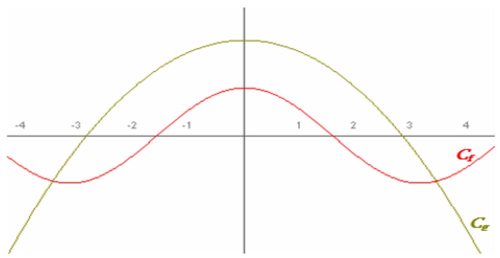
Soient $(C_f)$ la courbe représentative de $f$ et $(C_g)$ la courbe représentative de $g$.

On peut établir les relations suivantes :

$M(x;y)\in(C_f)$ ssi $y=f(x)$

$M(x;y)\in(C_g)$ ssi $y=g(x)$

Aux points d'intersection de $(C_f)$ et de $(C_g)$, on a $M\in(C_f)$ et $M\in(C_g)$ donc : soit $f(x)=g(x)$

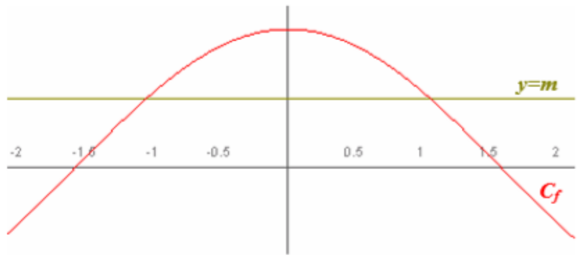



• les solutions de l'équation $f(x)=g(x)$ sont les abscisses des points D'intersection de $(C_f)$ et de $(C_g)$

• les solutions de l'inéquation $f(x)\geq g(x)$ sont les abscisses des points de $(C_f)$ situées au-dessus de $(C_g)$

• les solutions de l'inéquation $f(x)\leq g(x)$ sont les abscisses des points de $(C_f)$ situées au- dessous de $(C_g)$

### b)équation $f(x)=m$ et inéquation $f(x)\geq m$




• Les solutions de l'équation $f(x)=m$ sont les abscisses des points d'intersection de $(C_f)$ avec la droite d'équation $y=m$

• Les solutions de l'inéquation $f(x)\geq m$ sont les abscisses des points de $(C_f)$ situés au-dessus de la droite d'équation $y=m$ .

*« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.*
*C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien*