I. Généralités sur les fonctions numériques :

A. Fonction numérique d'une variable numérique :

a. Préambule :

♣ **Activité 1:**

Une tortue se déplace avec une mouvement uniforme tel que $4\ \text{cm}$ par minute .

1. Compléter le tableau suivant pour connaitre la distance parcourue en cm après l'écoulement du temps qui est exprimée en minute .

Le temps t (en minute)	0	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	x	....
La distance d (en centimètre)								

♣ **Vocabulaire :**

- La relation qui nous permet à lier chaque élément x de $\mathbb{R}^+$ par un seul élément de y $\mathbb{R}^+$ qui tel que $y = 4x$ est appelée fonction numérique de la variable réelle x définie de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$, on la note par f ou g ou h ...
- on résume le tout par : $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$
  $x \mapsto f(x) = 4x$
- x est la variable .
- x est lié par $f(x) = 4x$ on dit que :
  - ✓ $y = f(x)$ est l'image de x par f .
  - ✓ x est un antécédent de y par f
- Si l'image de x existe on dit que la fonction f est définie en x. (par exemple -5 n'a pas d'image)
- Tous les réels x qui ont images par la fonction f constituent un ensemble appelé ensemble de définition ou domaine de définition , on le note par D ou D_f . pour l'activité on a : $D_f = \mathbb{R}^+$.
- $x \in D_f$ équivaut à $f(x) \in \mathbb{R}$.
- A est un ensemble inclus dans D_f $(A \subset D_f)$, on dit que la fonction f est définie sur A .

b. Exemples :

On détermine l'ensemble de définition de chaque fonction suivante .

- $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

  on a : $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 0$ donc $D_f = \mathbb{R}^*$ ou $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ou $D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.
- $f(x) = \sqrt{x}$.

  $x \in D_f \Leftrightarrow x \geq 0$ donc $D_f = \mathbb{R}^+$ ou $D_f = [0, +\infty[$.
- $f(x) = 2x$.

on a : la fonction f est une fonction polynomiale donc il définie pour x de $\mathbb{R}$ donc $D_f = \mathbb{R}$ ou $D_f =]-\infty,+\infty[$.

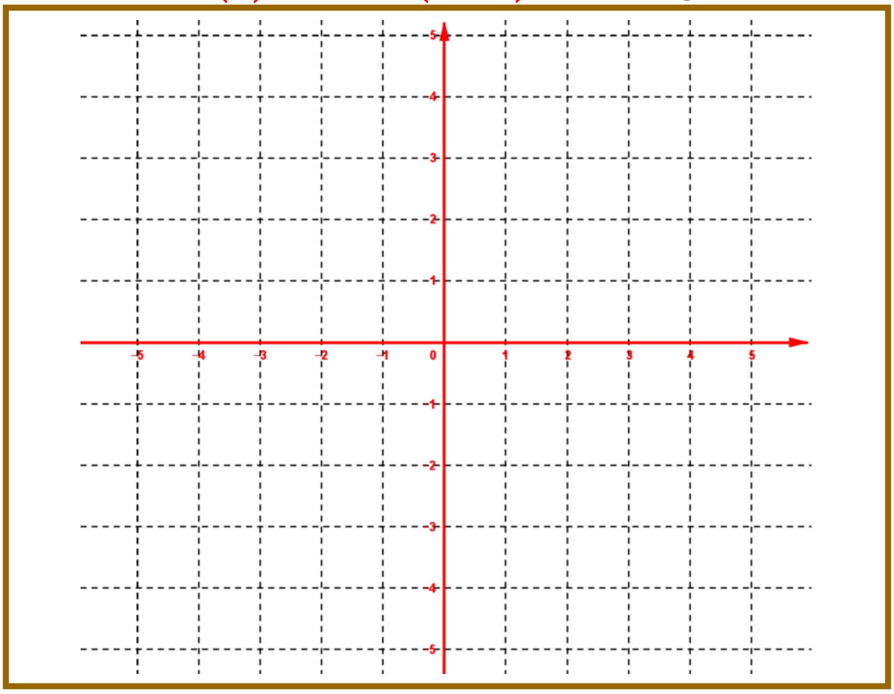
B. La représentation graphique (ou la courbe représentative)d'une fonction numérique :

a. Activité :

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par $f(x) = 2x$.

Le plan (P) est rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ (on général le repère est orthonormé) .

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Construire quelques points de (P) tel que $M(x,f(x))$ avec $x \in D_f$.



b. Vocabulaire :

Le dessin obtenue s'appelle la représentation graphique de la fonction f dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ (ou la courbe de la fonction f) on note (C_f) .

c. Définition :

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie sur D_f $(D_f \subset \mathbb{R})$.

Le plan (P) est rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

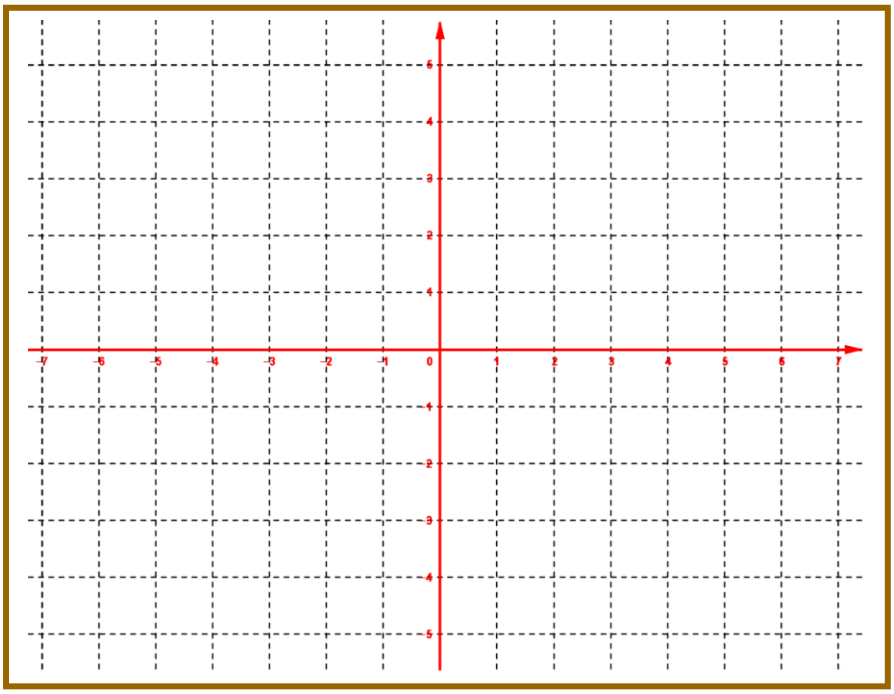
On appelle courbe représentative de la fonction f, notée (C_f), l'ensemble des points M de (P) de coordonnées $(x,f(x))$ où $x \in D_f$.

Un point $M(x,y) \in (C_f)$ équivaut à $x \in D_f$ et $y = f(x)$.

La relation : $y = f(x)$ s'appelle équation cartésienne de la courbe (C_f) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

d. Exemple :

Construire la courbe représentative de la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x$



C. Egalité de deux fonctions :

a. Activité :

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=2x$ et $g(x)=x+|x|$.

1. Simplifier l'écriture de la fonction g.
2. Quelle remarque peut-on donner ?

b. Définition :

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g .
On dit que les deux fonctions f et g sont égales si et seulement si :

- $D_f = D_g$.
- Pour tout x de D_f on a : $f(x)=g(x)$
- Dans ce cas on écrit : $f=g$

c. Remarque :

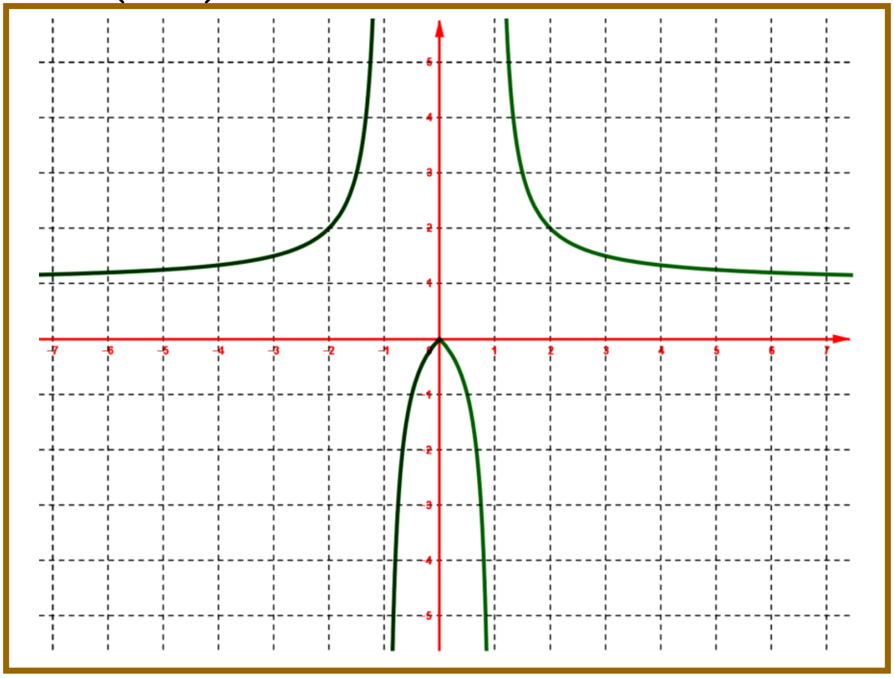
Si $f=g$ on a : les courbes (C_f) et (C_g) de f et g sont confondues .

II. Fonction paire – fonction impaire :

A. Fonction paire :

a. Activité :

La figure ci-contre représente la courbe d'une fonction numérique de la variable x dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.



1. La courbe $\left(C_f\right)$ représente une fonction paire ,quelles remarques peut-on donner ?
2. Donner la définition d'une fonction paire .

b. Définition :

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie sur D_f.

On dit que f est une fonction paire sur D_f si et seulement si : pour tout x de D_f on a :

- ✓ Aussi $-x$ est un élément de D_f.
- ✓ $f\left(-x\right)=f\left(x\right)$ (c.à.d. $-x$ et x ont même image)

c. Remarque :

- la courbe d'une fonction f paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Si la fonction f est paire sur D_f il suffit de connaitre la partie de la courbe $\left(C_f\right)$ tel que les abscisses sont positives , ces abscisses constituent une partie de $\mathbb{R}^+$ appelée domaine d'étude de la fonction f , notée D_E.
- On a : $D_E=D_f\bigcap\mathbb{R}^+$.

d. Exemple :

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie par $f\left(x\right)=3x^2+5$.

1. On détermine l'ensemble de définition f .

La fonction f est une fonction polynômiale donc définie pour tout x de $\mathbb{R}$, d'où l'ensemble de définition est $D_f = \mathbb{R}$.

2. On étudie la parité de f (est-ce que f est paire ou bien impaire ?) .

- On a : pour tout x de $D_f = \mathbb{R}$ aussi $-x$ est un élément de $D_f = \mathbb{R}$.
- Soit x de $\mathbb{R}$:on a :

$$\begin{aligned} f(-x) &= 3(-x)^2 + 5 \\ &= 3x^2 + 5 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

D'où : $f(-x) = f(x)$.

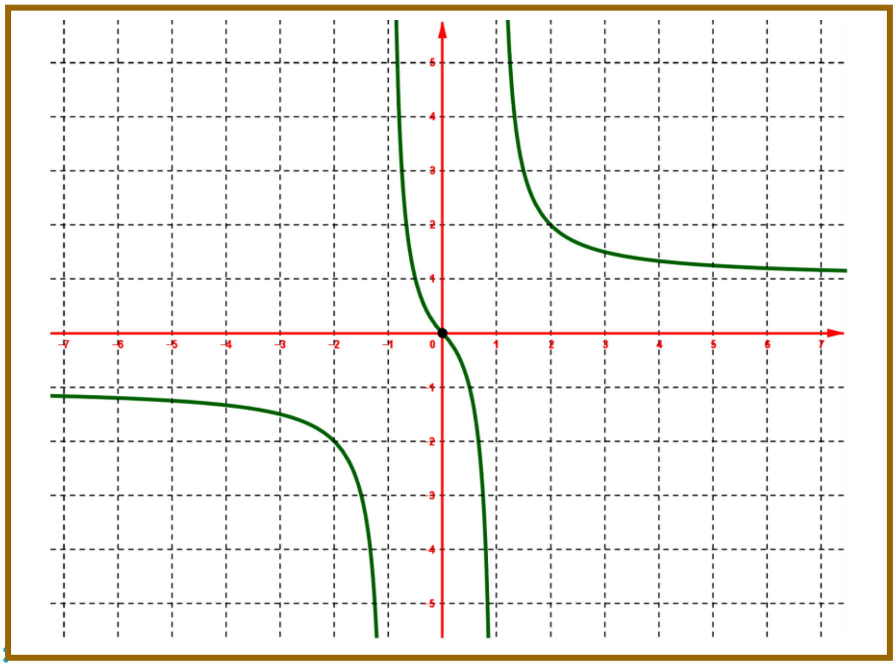
Conclusion : La fonction f est une fonction est paire .

B. Fonction impaire :

a. Activité :

La figure ci-contre représente la courbe d'une fonction numérique de la variable x dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. La courbe (C_f) représente une fonction impaire ,quelles remarques peut-on donner ?
2. Donner la définition d'une fonction impaire .



b. Définition :

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie sur D_f .

On dit que f est une fonction impaire sur D_f si et seulement si : pour tout x de D_f on a :

- ✓ Aussi $-x$ est un élément de D_f .
- ✓ $f(-x) = -f(x)$ (c.à.d. $-x$ et x ont des images opposées)

c. Remarque :

- la courbe d'une fonction f impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.
- Si la fonction f est impaire sur D_f il suffit de connaitre la partie de la courbe (C_f) tel que les abscisses sont positives , ces abscisses constituent une partie de $\mathbb{R}^+$ appelée domaine d'étude de la fonction f , notée D_E.
- On a : $D_E = D_f \cap \mathbb{R}^+$.

d. Exemple :

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = 7x^3 + 2x$.

1. On détermine l'ensemble de définition f .
   La fonction f est une fonction polynômiale donc définie pour tout x de $\mathbb{R}$, d'où l'ensemble de définition est $D_f = \mathbb{R}$.
2. On étudie la parité de f (est-ce que f est paire ou bien impaire ?) .
   - On a : pour tout x de $D_f = \mathbb{R}$ aussi $-x$ est un élément de $D_f = \mathbb{R}$.
   - Soit x de $\mathbb{R}$:on a :

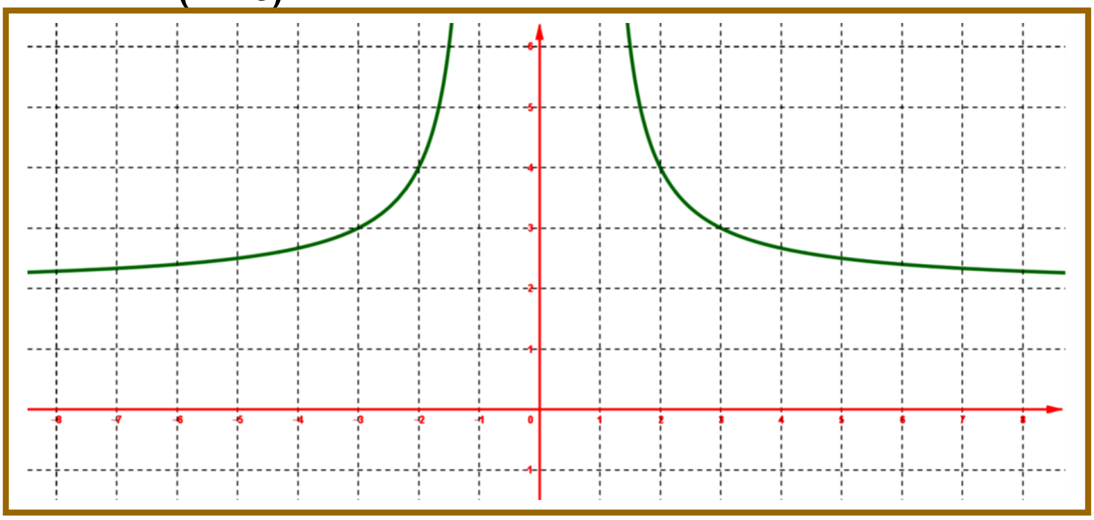
$$\begin{aligned} f(-x) &= 7(-x)^3 + 2(-x) \\ &= -7x^3 - 2x \quad , \ \left((-x)^3 = -x^3\right) \\ &= -\left(7x^3 + 2x\right) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

D'où : $f(-x) = -f(x)$. **Conclusion :** La fonction f est une fonction est impaire .

III. Sens de variation d'une fonction :

a. Activité :

La figure ci-contre représente la courbe d'une fonction numérique de la variable x dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.



1. La courbe (C_f) représente une fonction .
   - strictement croissante sur l'intervalle $[-5,-2]$, quelles remarques peut-on donner ?
   - strictement décroissante sur l'intervalle $[3,6]$, quelles remarques peut-on donner ?
2. Donner la définition d'une fonction strictement croissante puis d'une fonction strictement décroissante .

b. Définitions :

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie sur D_f . I est un intervalle inclus dans D_f $(I \subset D_f)$.

- On dit que f est une fonction croissante ou bien si et seulement si :
  pour tous x et x' de I on a : si $x < x'$ alors $f(x) \leq f(x')$.(le sens de l'inégalité ne change pas)
- On dit que f est une fonction strictement croissante sur l'intervalle I si et seulement si :
  pour tous x et x' de I on a: si $x < x'$ alors $f(x) < f(x')$.(le sens de l'inégalité ne change pas)
- On dit que f est une fonction décroissante sur l'intervalle I si et seulement si :
  pour tous x et x' de I on a : si $x < x'$ alors $f(x) \geq f(x')$. (le sens de l'inégalité change)
- On dit que f est une fonction strictement décroissante sur l'intervalle I si et seulement si :
  pour tous x et x' de I on a : si $x < x'$ alors $f(x) > f(x')$. (le sens de l'inégalité change)
- On dit que f est une fonction constante sur l'intervalle I si et seulement si :
  pour tous x et x' de I on a : $f(x) = f(x')$

c. Remarque :

- la fonction f est strictement croissante on utilise la flèche suivante $\nearrow$.
- la fonction f est strictement décroissante on utilise la flèche suivante $\searrow$.
- Si la fonction f est croissante ou bien décroissante sur l'intervalle I on di que f est monotone sur I .
- Si la fonction f est strictement croissante ou bien strictement décroissante sur l'intervalle I on di que f est strictement monotone sur I .
- Déterminer les variations d'une fonction c'est de rechercher les intervalles sur lesquelles la fonction f est strictement monotone ou constante .
- On résume :l'ensemble de définition de la fonction f et les variations de la fonction f par un tableau , appelé tableau de variation de f .

d. Exemple :

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = 5x - 3$.

1. On détermine l'ensemble de définition f .

l'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R}$. (car f est une fonction polynômiale).

2. Etudier les variations de f sur $D_f = \mathbb{R}$, puis on donne le tableau de variation de la fonction f .

- On étudie la monotonie de f .

Soient x et x' de $\mathbb{R}$ tel que $x < x'$

$x < x'$ alors $5\times x < 5\times x'$ (on multiplier les deux membres de l'inégalité par 5)

Alors $5\times x - 3 < 5\times x' - 3$.

Alors $f(x) < f(x')$.

Conclusion : la fonction f est strictement croissants sur $\mathbb{R}$.

- On donne le tableau de variation de f .

Ensemble de définition →	x	$-\infty$ $+\infty$
Variations de f →	$f(x)$	$\nearrow$

IV. Taux d'accroissement d'une fonction :

a. Définition :

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie sur D_f . I est un intervalle inclus dans D_f $(I \subset D_f)$.

Soient x et x' de I tel que $x \neq x'$, le nombre $\dfrac{f(x)-f(x')}{x-x'}$ est appelé le taux d'accroissement de la fonction f entre x et x' , on note T_f d'où $T_f = \dfrac{f(x)-f(x')}{x-x'}$

b. Exemple :

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = 5x - 3$.

1. Calculer le taux d'accroissement de la fonction f sur $D_f = \mathbb{R}$.

Soient x et x' de I tel que $x \neq x'$, on a : $T_f = \dfrac{f(x)-f(x')}{x-x'}$

$$= \frac{5x-3-(5x'-3)}{x-x'}$$

$$= \frac{5x-\cancel{3}-5x'+\cancel{3}}{x-x'}$$

$$= \frac{5\cancel{(x-x')}}{\cancel{x-x'}} = 5$$

Conclusion : le taux d'accroissement de la fonction f est $T_f = 5$.

c. Propriété :

T_f est le taux d'accroissement de la fonction f sur un intervalle I.

- Si $T_f > 0$ alors la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle I.
- Si $T_f > 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle I.
- Si $T_f = 0$ alors la fonction f est constante sur l'intervalle I.

d. Exemple :

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = 5x - 3$.

1. Déterminer la monotonie de la fonction f.

   D'après l'exemple précédent on a : $T_f = 5 > 0$ d'où la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

V. Extremums d'une fonction :

A. Valeurs maximales valeurs minimales d'une fonction sur un intervalle I :

a. Activité :

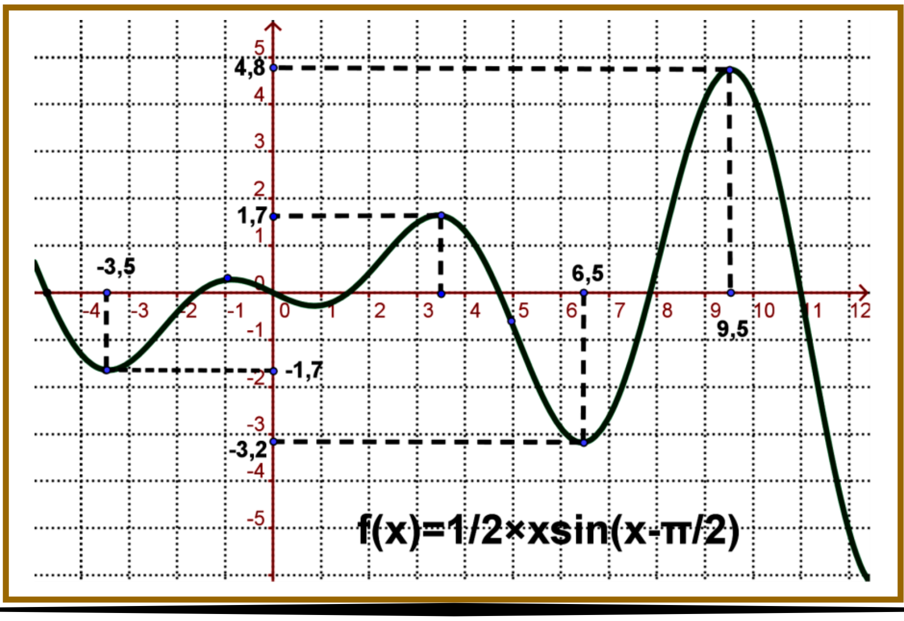
La figure ci-contre présente la courbe d'une fonction f définie sur D_f, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- On dit que $1,7$ est une valeur maximale de la fonction f sur l'intervalle $[2,4]$ ou $]0,7[$
- On dit que $9,5$ est une valeur maximale de la fonction f sur l'intervalle $[8,11]$ ou $]-4,10]$

1. Quelle définition peut-on donner sur valeurs maximales .

- On dit que $-1,7$ est une valeur minimale de la fonction f sur l'intervalle $[-4,-2]$ ou $[-4,3]$
- On dit que $6,5$ est une valeur minimale de la fonction f sur l'intervalle $[3,8]$ ou $[-4,10[$

2. Quelle définition peut-on donner sur valeurs minimales .



b. Définition :

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie sur D_f . I est un intervalle inclus dans D_f $(I \subset D_f)$, $a \in I$.

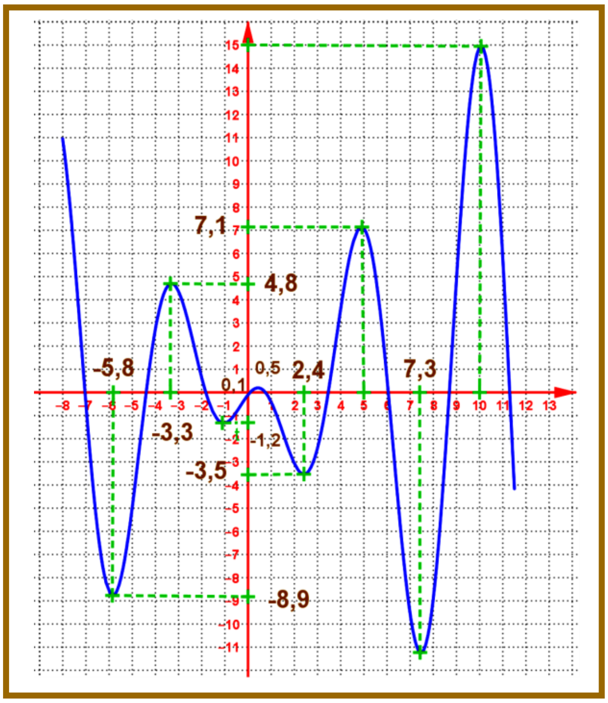
- $f(a)$ est une valeur maximale de la fonction f sur l'intervalle I équivaut à $f(x) \leq f(a)$.
- $f(a)$ est une valeur minimale de la fonction f sur l'intervalle I équivaut à $f(a) \leq f(x)$.

c. Remarque :

- $f(a)$ est un extrémum de la fonction f signifie que $f(a)$ est une valeur maximale ou bien $f(a)$ est une valeur minimale de f .
- On dit aussi que la fonction f admet une valeur maximale en a .
- On dit aussi que la fonction f admet une valeur minimale en a .
- Si $f(a)$ est une valeur maximale de la fonction f sur D_f on dit que $f(a)$ est une valeur maximale absolue de f . (si non on dit que $f(a)$ est une valeur maximale relative)
- Si $f(a)$ est une valeur minimale de la fonction f sur D_f on dit que $f(a)$ est une valeur maximale absolue de f . (si non on dit que $f(a)$ est une valeur minimale relative)

d. Exercice :

La figure ci-contre présente la courbe d'une fonction f définie sur D_f , dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.



1. Déterminer les extremums de f sur
   - $[4,11]$; $[-8;9]$; $[-5;3]$

VI. Etude de certains fonctions :

A. Fonction $f(x) = ax^2$; (avec $a \neq 0$)

a. Activité :

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = ax^2$; (avec $a \neq 0$) .

1. On détermine l'ensemble de définition f .

l'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R}$. (car f est une fonction polynômiale).

2. On étudie la parité de f (est-ce que f est paire ou bien impaire ?) .

- On a : pour tout x de $D_f = \mathbb{R}$ aussi $-x$ est un élément de $D_f = \mathbb{R}$.
- Soit x de $\mathbb{R}$:on a : $f(-x) = a(-x)^2$

$$= ax^2$$
$$= f(x)$$

D'où : $f(-x) = f(x)$.

Conclusion : La fonction f est une fonction est paire sur $D_f = \mathbb{R}$.

3. On déduit l'ensemble d'étude de f .

On a : $D_E = D_f \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+ = [0,+\infty[$.

Conclusion : domaine d'étude de f est $D_E = [0,+\infty[$.

4. Calculer le taux d'accroissements de f sur D_E et on déduit les variations de f sur D_E puis sur D_f .

Soient x et x' de $D_E = [0,+\infty[$ tel que $x \neq x'$, on a : $T_f = \dfrac{f(x)-f(x')}{x-x'}$

$$= \frac{ax^2 - ax'^2}{x-x'}$$

$$= \frac{a\cancel{(x-x')}(x+x')}{\cancel{x-x'}} = a(x+x')$$

Donc : $T_f = a(x+x')$ puisque x et x' de $D_E = [0,+\infty[$ donc $x+x' \geq 0$ et on a $x \neq x'$ au moins un des nombres x et x' est non nul d'où $x+x' > 0$.

1er cas : $a > 0$ car $f(x) = ax^2$; (avec $a \neq 0$)

On a $a > 0$ et $x+x' > 0$ donc $a(x+x') > 0$ d'où $T_f > 0$.

Conclusion 1 :

- la fonction f est strictement croissante sur $D_E = [0,+\infty[$.
- la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty,0]$ car la fonction est paire(la fonction ne varie pas dans le même sens .

2ième cas : $a < 0$ car $f(x) = ax^2$; (avec $a \neq 0$)

On a $a < 0$ et $x+x' > 0$ donc $a(x+x') < 0$ d'où $T_f < 0$.

Conclusion2 :

- la fonction f est strictement décroissante sur $D_E = [0,+\infty[$.
- la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty,0]$ car la fonction est paire (la fonction ne varie pas dans le même sens .

b. propriété :

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x)=ax^2$; $(a\in\mathbb{R}^*)$.

- la fonction f est paire sur $D_f=\mathbb{R}$.
- La monotonie de la fonction f est :
  - 1^{er} cas $a>0$:

    la fonction f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty,0]$.
  - $2^{ième}$ cas $a<0$:

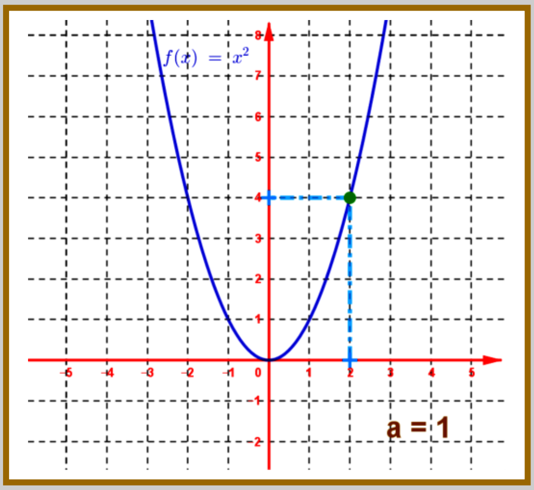
    la fonction f est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ et strictement croissante sur $]-\infty,0]$.
- le tableau de variation est :
  - 1^{er} cas $a>0$:

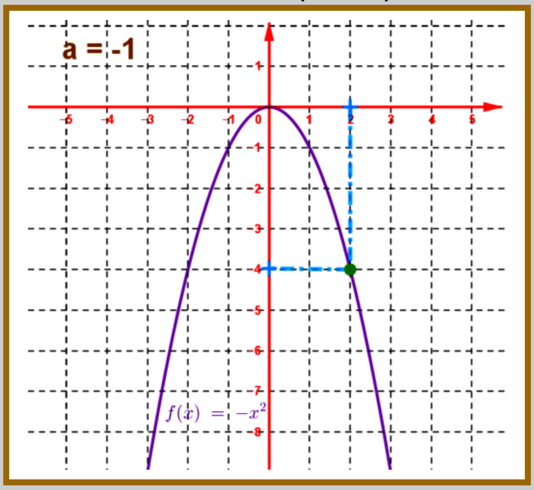
$a>0$	x	$-\infty$	0	$+\infty$
	f	↘	0	↗

  - $2^{ième}$ cas $a<0$:

$a<0$	x	$-\infty$	0	$+\infty$
	f	↗	0	↘

- La courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.





- La courbe représentative de la fonction f est appelée parabole , de sommet l'origine **O** (du repère $(O,\vec{i},\vec{j})$) , d'axe de symétrie l'axe des ordonnées (la droite d'équation (D) : $x=0$)

c. Exemple :

1. Dresser le tableau de variation de la fonction $f(x)=\frac{1}{2}x^2$.

On a : $a=\frac{1}{2}$ d'où le tableau de variations de f est :

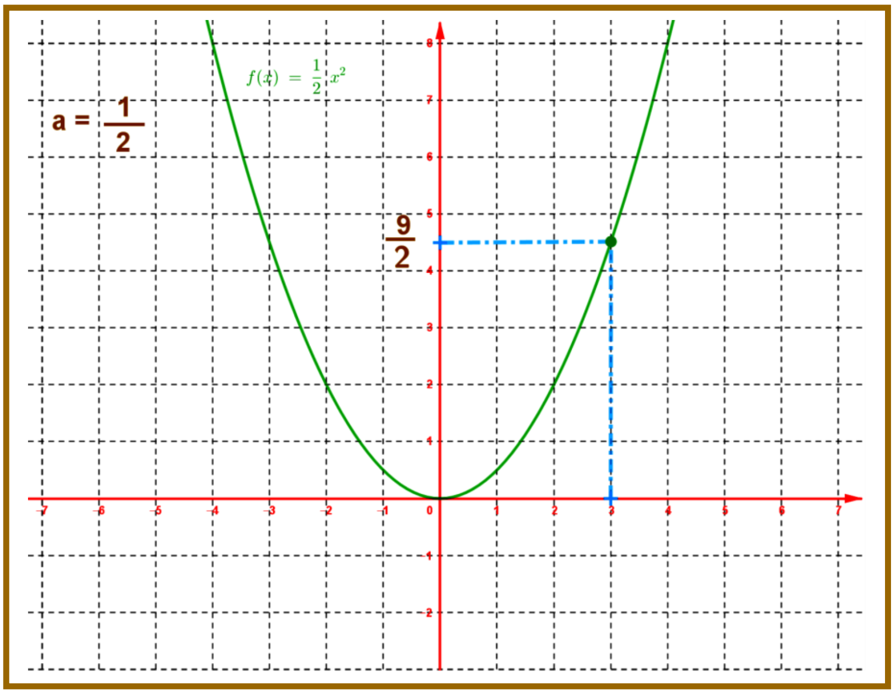
$a=\frac{1}{2}>0$	x	$-\infty$	0	$+\infty$
	f	↘	0	↗

2. Construire la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

Pour construire la courbe on donne un tableau de certains valeurs :

x	0	1	$\frac{3}{2}$	2	3	…
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{8}$	2	$\frac{9}{2}$	…

La courbe représentative : (on oublie pas que la fonction f est paire sur $\mathbb{R}$)



B. Fonction $f(x)=\frac{a}{x}$; (avec $a\neq 0$)

a. Activité :

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x)=\frac{a}{x}$; (avec $a\neq 0$) .

1. On détermine l'ensemble de définition f .

$x\in D_f$ est équivaut à $x\neq 0$

l'ensemble de définition de f est $D_f=\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$. (car f est une fonction rationnelle).

2. On étudie la parité de f (est-ce que f est paire ou bien impaire ?) .

- On a : pour tout x de $D_f=\mathbb{R}^*$ aussi $-x$ est un élément de $D_f=\mathbb{R}^*$.
- Soit x de $\mathbb{R}^*$:on a : $f(-x)=\frac{a}{-x}=-\frac{a}{x}=-f(x)$

D'où : $f(-x)=-f(x)$.

Conclusion : La fonction f est une fonction est impaire sur $D_f=\mathbb{R}^*$.

3. **On déduit l'ensemble d'étude de f .**

On a : $D_E = D_f \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^* \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^{+*} =]0,+\infty[$.

Conclusion : domaine d'étude de f est $D_E =]0,+\infty[$.

4. **Calculer le taux d'accroissements de f sur D_E et on déduit les variations de f sur D_E puis sur D_f .**

Soient x et x' de $D_E =]0,+\infty[$ tel que $x \neq x'$, on a :

$$T_f = \frac{f(x)-f(x')}{x-x'} = \frac{\frac{a}{x}-\frac{a}{x'}}{x-x'} = \frac{\frac{ax'-ax}{xx'}}{x-x'} = \frac{\frac{a(x'-x)}{xx'}}{x-x'} = \frac{-a(x-x')}{xx'(x-x')} = \frac{-a\cancel{(x'-x)}}{xx'\cancel{(x-x')}} = \frac{-a}{xx'}$$

Donc : $T_f = \frac{-a}{xx'}$ puisque x et x' de $D_E =]0,+\infty[$ donc $x+x' \geq 0$ et on a $x \neq x'$ au moins un des nombres x et x' est non nul d'où $x+x' > 0$.

1^{er} cas : $a > 0$ car $f(x) = \frac{a}{x}$; (avec $a \neq 0$)

On a $-a < 0$ et $x+x' > 0$ donc $\frac{-a}{xx'} < 0$ d'où $T_f < 0$.

Conclusion 1 :

- la fonction f est strictement décroissante sur $D_E =]0,+\infty[$.
- la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty,0[$ car la fonction est impaire (la fonction varie dans le même sens).

$2^{ième}$ cas : $a < 0$ car $f(x) = \frac{a}{x}$; (avec $a \neq 0$)

On a $-a > 0$ et $x+x' > 0$ donc $\frac{-a}{xx'} > 0$ d'où $T_f > 0$.

Conclusion2 :

- la fonction f est strictement croissante sur $D_E =]0,+\infty[$.
- la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty,0[$ car la fonction est impaire (la fonction varie dans le même sens).

b. propriété :

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x)=\frac{a}{x}$; $(a \in \mathbb{R}^*)$.

❖ la fonction f est impaire sur $D_f = \mathbb{R}^*$.

❖ La monotonie de la fonction f est :

- 1er cas $\Delta > 0$:

  la fonction f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty,0[$.

- 2ième cas $\Delta < 0$:

  la fonction f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et strictement croissante sur $]-\infty,0[$.

❖ le tableau de variation est :

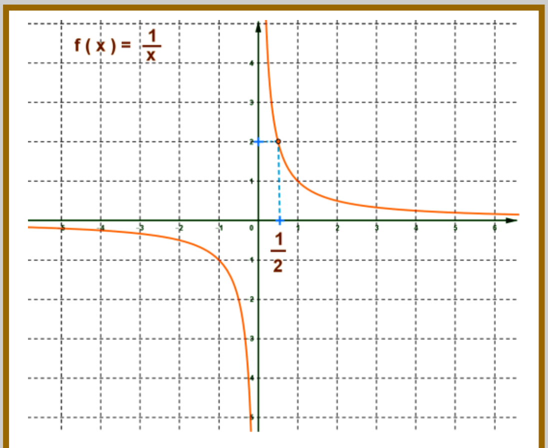
- 1er cas $a > 0$:

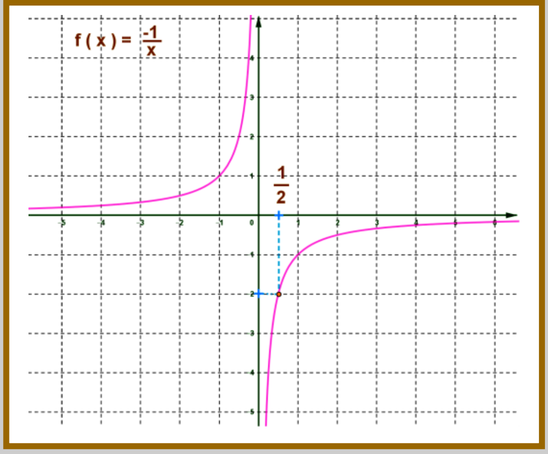
$\Delta > 0$	x	$-\infty$	0	$+\infty$
	f	↘	‖	↘

- 2ième cas $a < 0$:

$\Delta < 0$	x	$-\infty$	0	$+\infty$
	f	↗	‖	↗

❖ La courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.





❖ La courbe représentative de la fonction f est appelée hyperbole ,

✓ de centre de symétrie l'origine O (du repère $(O,\vec{i},\vec{j})$) ,

✓ d'asymptote horizontale l'axe des abscisses (la droite d'équation $(D) : y = 0$)

✓ d'asymptote verticale l'axe des ordonnées (la droite d'équation $(D') : x = 0$)

c. Exemple :

1. Dresser le tableau de variation de la fonction $f(x)=\frac{2}{x}$.

On a : $a = 2$ d'où le tableau de variations de f est :

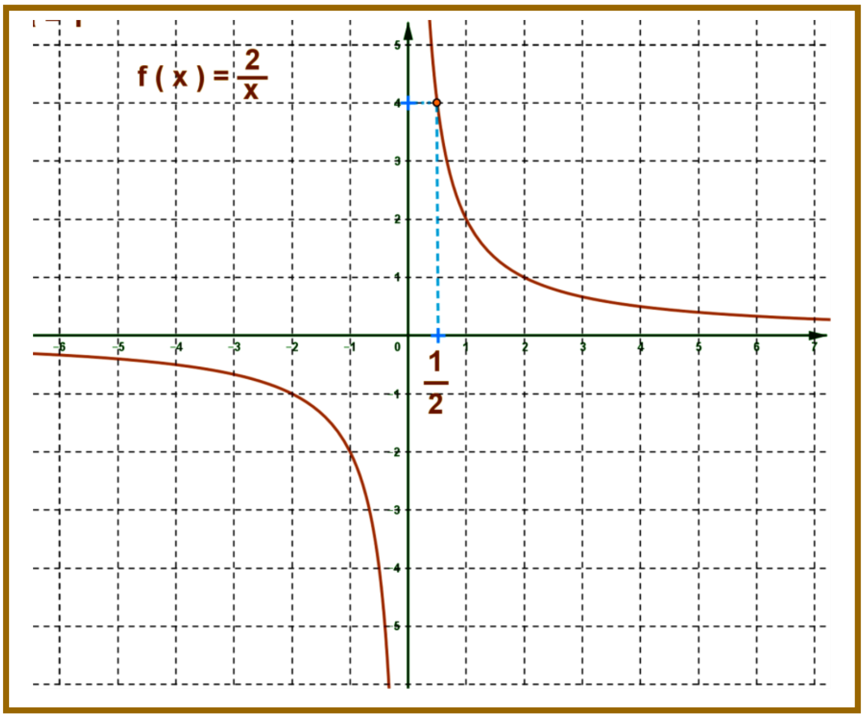
$a > 0$	x	$-\infty$		0		$+\infty$
	f		$\searrow$	$\|$	$\searrow$	

2. Construire la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

Pour construire la courbe on donne un tableau de certains valeurs :

x	$\frac{1}{2}$	1	2	3	…
$f(x)$	4	2	1	$\frac{2}{3}$	…

La courbe représentative : (on oublie pas que la fonction f est impaire sur $\mathbb{R}^*$)



C. Fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$; (avec $a \neq 0$)

a. Propriété (admise) :

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$; (avec $a \neq 0$)

- La fonction f s'écrit de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x+\alpha)^2 + \beta$ avec α et β de $\mathbb{R}$.
- La courbe représentative de la fonction f est un parabole , de sommet le point $S(-\alpha,\beta)$ (du repère $(O,\vec{i},\vec{j})$) , d'axe de symétrie la droite d'équation $(D) : x = -\alpha$).
- On La courbe représentative de la fonction f est obtenue en utilisant la translation du vecteur $\vec{u} = -\alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$ de la courbe $f(x) = ax^2$

❖ le tableau de variation est :

- 1^{er} cas $a > 0$:

$a > 0$	x	$-\infty$ $\qquad -\alpha \qquad$ $+\infty$
	f	$\searrow$ $f(-\alpha) = \beta$ $\nearrow$

- $2^{ième}$ cas $a < 0$:

$a < 0$	x	$-\infty$ $\qquad -\alpha \qquad$ $+\infty$
	f	$\nearrow$ $f(-\alpha) = \beta$ $\searrow$

b. La courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

❖ Exemple $f(x) = x^2 - 4x + 3$; $(a = 1 > 0)$. $a = 1 > 0$ et $b = -4$ et $c = 3$ et $\Delta = 4$

❖ le tableau de variations est :

- on a $a > 0$: On a : $f(x) = x^2 - 4x + 3 = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$

d'où : $f(x) = x^2 - 4x + 3 = a\left(x + \frac{-4}{2\times 1}\right)^2 - \frac{\sqrt{4}}{4\times 1} = (x-2)^2 - 1$

Donc : $\alpha = -2$ et $\beta = -1$

Par suite le tableau de variations de f est :

$a = 1 > 0$ $b = -4$ $c = 3$	x	$-\infty$ $\qquad -\alpha = 2 \qquad$ $+\infty$
	f	$\searrow$ $f(-\alpha) = \beta = -1$ $\nearrow$

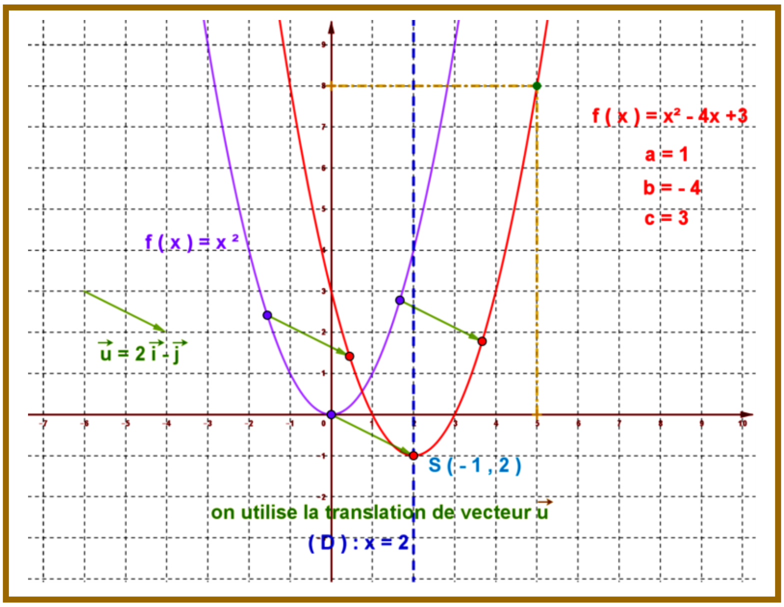
❖ La courbe représentative de f :

$1^{ère}$ méthode (on utilise la translation)

✓ On construit la courbe d'équation $f(x) = ax^2 = x^2$

✓ Puis la translate suivant le vecteur :

$\vec{u} = -\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} = 2\vec{i} - \vec{j}$.

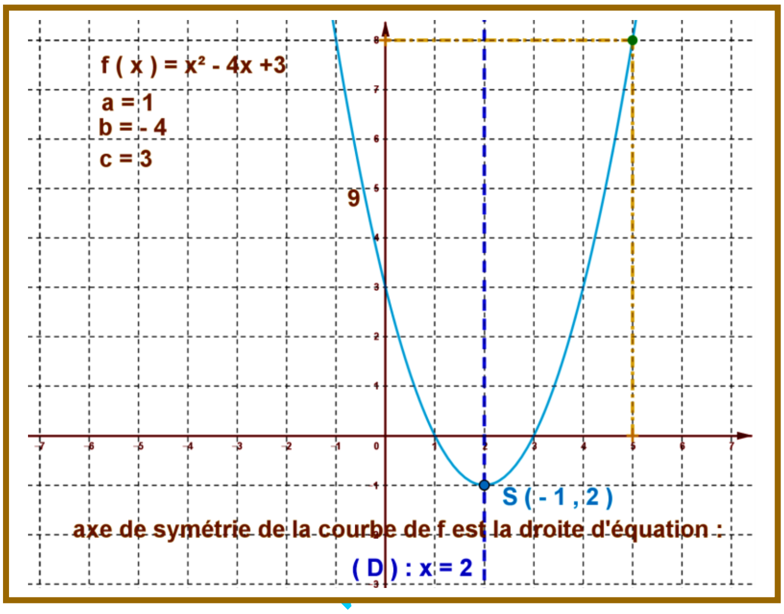


$2^{ième}$ méthode :

✓ On trace l'axe de symétrie la droite d'équation $(D) : x = 2$.

- ✓ On place le sommet qui est le point $S(2;-1)$.
- ✓ On donne quelques valeurs avec $x \geq 2$
- ✓ On construit la partie de la courbe sur $[2,+\infty[$ puis son symétrique par rapport à (D)

x	2	3	4	5	…
$f(x)$	-1	0	3	8	…



D. Fonction $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$; $(\text{ avec } ad-bc\neq 0)$

a. Propriété (admise) :

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$; $\left(\text{avec } \Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc\neq 0 \right)$ et $c \neq 0$

- ❖ La fonction f s'écrit de la forme $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}=\beta+\dfrac{k}{x+\alpha}$ avec α et β et k de $\mathbb{R}$ et $x\neq-\alpha$.
- ❖ La courbe représentative de la fonction f est un hyperbole , de centre le point $S(-\alpha,\beta)$ (du repère $(O,\vec{i},\vec{j})$) , de centre de symétrie le sommet le point $S(-\alpha,\beta)$.
- ❖ d'asymptote horizontale la droite d'équation $(D) : y=\beta$.
- ❖ d'asymptote verticale la droite d'équation $(D') : x=-\alpha$.
- ❖ On La courbe .représentative de la fonction f est obtenue en utilisant la translation du vecteur $\vec{u}=-\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}$ de la courbe de $f(x)=\dfrac{k}{x}$ (hyperbole)

❖ le tableau de variation est :

- 1[er] cas $\Delta>0$:

$a>0$	x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
	f	↘	‖	↘

- 2[ième] cas $\Delta<0$:

$a<0$	x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
	f	↗	‖	↗

b. La courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

❖ Exemple $f(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$; $(a=1>0)$. $a=1>0$ et $b=-1$ et $c=1$ et $d=2$ et $\Delta=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3\neq 0$

❖ le tableau de variations est :

- on a : $\Delta>0$:

On a : $f(x)=\dfrac{x-1}{x+2}=\dfrac{x+2-3}{x+2}=\dfrac{x+2}{x+2}+\dfrac{-3}{x+2}=1+\dfrac{-3}{x+2}$

d'où : $\alpha=-2$ et $\beta=1$ et $k=-3$

Par suite le tableau de variations de f est :

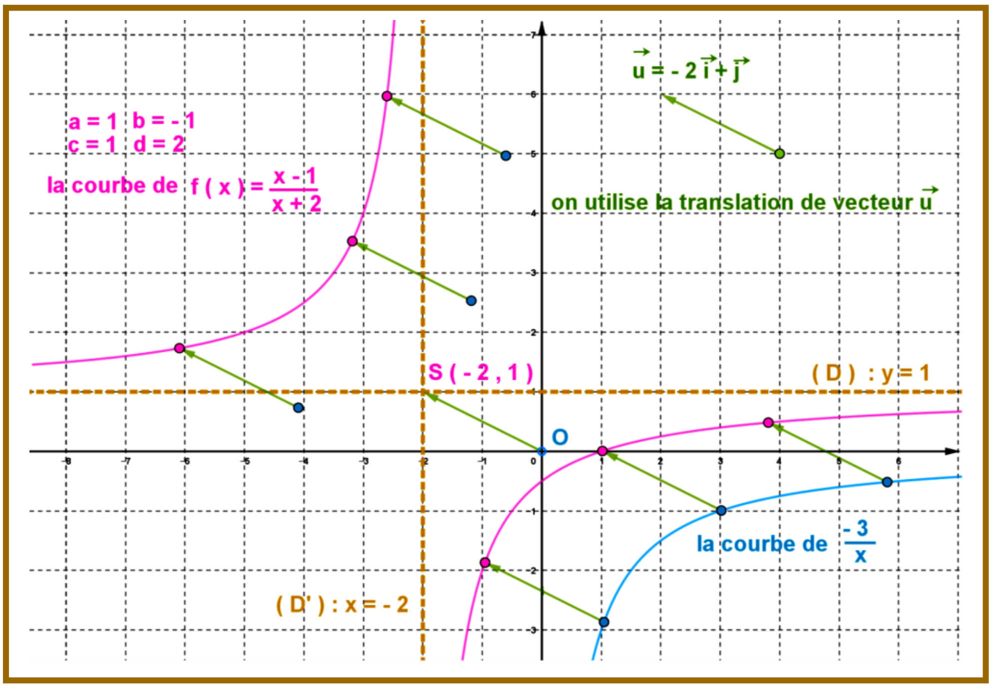
$\Delta=3>0$	x	$-\infty$ $\quad -\alpha=2$ $\quad +\infty$
	f	$\nearrow$ $\quad \Vert$ $\quad \nearrow$

❖ La courbe représentative de f :

1ère méthode

✓ On construit la courbe d'équation $f(x)=\dfrac{k}{x}=\dfrac{-3}{x}$ (hyperbole)

✓ Puis la translate suivant le vecteur : $\vec{u}=-\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}=2\vec{i}-\vec{j}$.



2ième méthode :

✓ On trace le sommet de l'hyperbole le point $S(2;-1)$. (Centre de symétrie de l'hyperbole)

✓ On trace :

❖ l'asymptote horizontale qui est la droite d'équation (D) : $y=\beta=1$.

❖ l'asymptote verticale qui est la droite d'équation (D') : $x=-\alpha=-2$.

✓ On donne quelques valeurs avec $x\geq-2$

✓ On construit la partie de la courbe sur $\left]-2,+\infty\right[$ puis son symétrique par rapport au point $S(2;-1)$ (centre de l'hyperbole) pour obtenir la partie du courbe sur l'intervalle $\left]-\infty,-2\right[$.

x	$\frac{-4}{3}$	-1	0	1	2
$f(x)$	$\frac{-7}{2}$	-2	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$