TD : PRODUIT SCALAIRE PROF : ATMANI NAJIB

2BAC série science expérimental filière : svt+pc

PRODUIT SCALAIRE de l'espace

Exercice1 : Soit ABCDEFGH un cube de côté a

Calculer les produits scalaires suivants :

$\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{GC}$; $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DH}.\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{GC}$ et $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{DB}$

Exercice2 : 1)Soit A , B et C des points de l'espace tel que $AB=\sqrt{5}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=3$

Calculer $\left(-2\overrightarrow{AB}\right).\overrightarrow{BC}$:

2) sachant que $\left\|\vec{u}\right\|=2$ et $\left\|\vec{v}\right\|=3$ et $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|=5$

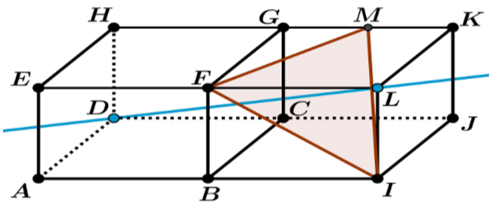
Calculer : $\vec{u}.\vec{v}$

Exercice3 : Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal à un plan dirigé par $\vec{u}(2,-1,3)$ et $\vec{v}(4,0,2)$.

Exercice4 : Deux cubes d'arête 1, sont disposés comme indiqué sur la figure.

M est le milieu du segment [GK].

La droite (DL) est-elle perpendiculaire au plan (FMI)?



Exercice5: $ABCDEFGH$ un cube tel que : $AB=1$ avec I le milieu du segment $[EH]$ et J le milieu de $[EF]$

1)Montrer que $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EB}=0$ et que $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{ED}=0$

2) En déduire que le vecteur $\overrightarrow{EG}$ est normal au plan (BDE)

3) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{FI}$ et $\overrightarrow{CJ}$ sont orthogonaux

4)l'espace étant rapporté au repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$

a) déterminer les coordonnées des points F ; C ; I et J

B)Montrer que $\overrightarrow{FI}\cdot\overrightarrow{CJ}=0$

et en déduire que $\overrightarrow{FI}$ et $\overrightarrow{CJ}$ sont orthogonaux

Exercice6 : Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par $A(4;2;-3)$ dont un vecteur normal est $\vec{n}(1;-2;-1)$

Exercice7 : $ABCDEFGH$ un cube tel que : $AB=1$ avec I le milieu du segment $[AE]$

On se place dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$

1) déterminer un vecteur normal au plan (CHI)

2) En déduire une équation cartésienne du plan (CHI)

Exercice8 : On considère les plans d'équations :

(P) $2x-4y+z+1=0$ et (P') $x+y+2z-3=0$

1)Monter que : $(P)\perp(P')$

2)Déterminer l'équation cartésienne du plan (Q) parallèle au plan (P) passant par le point $A(1;-1;1)$

Exercice9 :L'espace est muni d'un repère orthonormé$\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. On considère le plan (P) d'équation $x+2y-z-1=0$

1)Les points A(1;1;2) et B(2;1;1) appartiennent-ils au plan (P) ?

2)Calculer la distance AB puis les distances de ces deux points A et B au plan (P).

3)Le point A est-il le projeté orthogonal de B sur le plan (P) ?

Exercice10 :1)Déterminer l'équation cartésienne de la sphère de centre Ω(1, −1,2) et de rayon $R=3$

2)Déterminer l'équation cartésienne de la sphère de centre Ω(0, −3,0) et qui passe par A(2,1, −1).

Exercice11 : Déterminer une représentation paramétrique de la sphère de centre Ω(-1, 0,2) et de rayon $R=3$

Exercice12 :Déterminer(S) L'ensemble des points $M(x;y;z)$tels que

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + 2\sin\varphi\cos\theta \\ y = -1 + 2\sin\varphi\sin\theta \quad (\varphi;\theta) \in \mathbb{R}^2 \\ z = 1 + 2\cos\varphi \end{cases}$$

Exercice13 : Déterminer (S) L'ensemble des points $M(x;y;z)$ dans les cas suivants :

1) (S_1) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y - 4z = 0$

2) (S_2) : $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y + 6z + 22 = 0$

3) (S_3) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y + z + 7 = 0$

Exercice14 : Soit : $A(-1;2;1)$ et $B(1;-1;0)$ deux points de l'espace

Déterminer l'ensemble (S) des points $M(x;y;z)$ de l'espace tel que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

Exercice15 : Soient (S) une sphère :

$(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$

et (D) une droite : $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 + t \end{cases}$

Étudier la position relative de la sphère et la droite

Exercice16 : Soient (S) une sphère :

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z = 0$

et (D) une droite : $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 + t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = -2 + 5t \end{cases}$

Étudier la position relative de la sphère et la droite

Exercice17 : Soient (S) une sphère :

$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 1 = 0$

et (D) une droite : $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 + 2t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2 \end{cases}$

Étudier la position relative de la sphère et la droite

Exercice18 : Soient (S) une sphère :

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 14 = 0$

Et le plan d'équation $(P): 2x - y - z + 5 = 0$

Étudier la position relative de la sphère (S) et le plan (P)

Exercice19 : Soient (S) une sphère :

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$

Et le plan d'équation $(P): x - y + z - 3 = 0$

Étudier la position relative de la sphère (S) et le plan (P)

Exercice20 : Soient (S) une sphère :

$(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 9$

Et le plan d'équation $(P): 2x - y + 3z - 2 = 0$

Étudier la position relative de la sphère (S) et le plan (P)

Exercice21 : Soie (S) une sphère :

$(S): x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 3$

Et soit le point $A(1;-1;-1)$

Vérifier que $A \in (S)$ et Déterminer l'équations cartésienne du plan (P) tangent a la sphère (S) en A

Exercice22 : on considère les plans d'équations respectives (P) $x - y + z = 0$ et (Q) $2x + 3y + z - 6 = 0$

et la sphère (S) de centre $\Omega(1;2;4)$ et tangente au plan (P) et soit la droite (Δ) qui passant par Ω et perpendiculaire au plan (Q)

1) monter que les plans (P) et (Q) sont orthogonaux

2)a) déterminer l'équation cartésienne de la sphère (S)

b)déterminer le point de tangence de (P) et (S)

3)a) déterminer le point d'intersection de (Δ) et (Q)

b) Montrer que le plan (Q) coupe la sphère (S) suivant une cercle dont on déterminera le centre et le rayon

Exercice23: on considère l'ensemble (S_m) des points $M(x;y;z)$ de l'espace qui vérifient l'équations :

(S_m) : $mx^2+my^2+mz^2-2(m-1)x+2y+2z=0$

Avec m un paramètre non nul

1) monter que (S_m) est une sphère pour tout $m\in\mathbb{R}^*$

2) monter que tous les sphères se coupent suivant un seul cercle dont on déterminera le centre et le rayon

Exercice24 : dans l'espace $(\mathcal{E})$ est muni d'un repère $(0;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ orthonormé On considère les plan (P_m) d'équations $x+y-z-m=0$ avec m paramètre réel Et la sphère (S) de centre $\Omega(1;2;1)$ et le rayon $R=\sqrt{3}$

1)Etudier et discuter suivant le paramètre m la position relative de la sphère (S) et les plan (P_m)

2)soit (E) l'ensemble des réels m tels que : (P_m) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C_m)

Déterminer l'ensemble des centres des cercles (C_m) lorsque m varie dans (E)

Exercice25 : dans l'espace $(\mathcal{E})$ est muni d'un repère $(0;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ orthonormé on considère l'ensemble (S_m) des points $M(x;y;z)$ tq : (S_m) :

$x^2+y^2+z^2+mx+2(m-1)y+(m+4)z+1=0$

avec m paramètre réel

1)Montrer que (S_m) est une sphère $\forall m\in\mathbb{R}$

2)Déterminer l'ensemble des centres des (S_m) lorsque m varie dans $\mathbb{R}$

3)Montrer qu'il existe un cercle (C) incluse dans tous les sphères (S_m) $\forall m\in\mathbb{R}$ et Déterminer le plan (P) qui contient ce cercle (C)

4)Soit un point $M_0(x_0;y_0;z_0)$ dans l'espace tq $M_0\notin(P)$

Montrer qu'il existe une sphère unique qui passe par M_0

5)Montrer qu'il existe deux sphères (S_m) tangentes au plan $(O;x;y)$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien

Prof : Atmani najib