Exercice1 : Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes

1) $P:"\forall x\in\mathbb{R}/x^2>0"$
2) $P:"\exists x\in\mathbb{R}/x^2-2=0"$
3) $P: x\in[1;2[$
4) $P:"\ \forall n\in\mathbb{N}/\frac{n}{2}\in\mathbb{N}"$
5) $P:(\forall x\in\mathbb{R});-1\le\cos x\le1$
6) $P:(\forall n\in\mathbb{N});(\exists m\in\mathbb{N}):n\prec m$
7) $P:(\exists n\in\mathbb{N})\ 2n+1$ est pair
8) $P:(\forall n\in\mathbb{N});\sqrt{n}\in\mathbb{N}$
9) $P:(\forall x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R}):y-x>0$
10) $P:(\exists! x\in\mathbb{R});2x+4=0$
11) $P:(\exists! x\in\mathbb{R});x^2=2$
12) $P:(\exists x\in\mathbb{Z});\frac{x}{4}\in\mathbb{Z}$
13) $P:(\forall x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R}):y^2=x$

Exercice 2 Ecrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :
1. Le carré de tout réel est positif.
2. Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
3. Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.
4. Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.
5. Il existe un entier multiple de tous les autres.
6; Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.

Exercice 3 : $x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R}$

Montrer que : $\begin{cases}0\le x\prec 2\\0\le y\prec 2\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\succ1$

Exercice 4 : $x\in\mathbb{R}^+$ Montrer que :

$\frac{1}{1+\sqrt{x}}=1-\sqrt{x}\Rightarrow x=0$

Exercice 5 : 1) Montrer que :

$(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2):a^2+b^2=0\Rightarrow a=0$ et $b=0$

2) $x\in\mathbb{R}^+$ et $y\in\mathbb{R}^+$ Montrer que:

$x+y+2=2\sqrt{x}+2\sqrt{y}\Rightarrow x=y=1$

Exercice 6 : Montrer que :

$(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2):a^2+b^2=1\Rightarrow|a+b|\le\sqrt{2}$

Exercice 7 : Montrer que si $a\in\mathbb{Q}$ et $b\in\mathbb{Q}$ alors $a+b\in\mathbb{Q}$

Exercice 8 : on considère la fonction définie sur $\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ par :

$f(x)=\frac{x+2}{2x+1}$ Montrer que :

$|x-1|\prec\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{4}|x-1|\le|f(x)-f(1)|\le\frac{1}{2}|x-1|$

Exercice 9 : Montrer que : $n\in\mathbb{N}\Rightarrow\frac{n+1}{n+2}\notin\mathbb{N}$

Exercice 10 : Montrer que pour tout

$\forall x\in[-2;2]:2\sqrt{2}\succ\sqrt{4-x^2}$.

Exercice 11: Montrer que pour tout

$\forall x\in\mathbb{R}:|x-1|\le x^2-x+1$.

Exercice 12 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (E):

$1-\frac{x}{4}\succ\frac{1}{\sqrt{1+x}}$

Exercice 13 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (1):

$|x-1|+2x-3\ge0$

Exercice 14 : Montrer que pour tout

$\forall x\in\mathbb{R}:\sqrt{x^2+1}+x\succ0$.

Exercice 15 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (1):

$x^2-|x-2|+5=0$

Exercice 16 : Montrer que $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3 pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 17 : $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

Montrer que : $x\ne2$ et $y\ne2\Rightarrow2x+2y-xy-2\ne2$

Exercice 18 : $x\in\mathbb{R}$ et $x\ne-5$

Montrer que : $x\ne-8\Rightarrow\frac{x+2}{x+5}\ne2$

Exercice 19 : Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.

Exercice 20 : $x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R}$

Montrer que : $x\ne y\Rightarrow(x+1)(y-1)\ne(x-1)(y+1)$

Exercice 21 : Soit $n\in\mathbb{N}$et $p\in\mathbb{N}$

Montrer que $n\times p$ est pair ou n^2-p^2 est un multiple de 8 .

Exercice 22 : Soient $a\succ0$ et $b\succ0$ Montrer que si $\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}$ alors a = b.

Exercice 23 : Soit f la fonction numérique définit sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2+2x$

Montrer qu'il n'existe pas de nombre positif M tel que :
$\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x)\le M$

Exercice 24 : Montrer que : $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

Exercice 25 : (Contraposée ou absurde)
Soient $a;b\in\mathbb{Q}$

1)Montrer que : $a+b\sqrt{2}=0\Rightarrow a=b=0$
2)en déduire que : $a+b\sqrt{2}=a'+b'\sqrt{2}\Rightarrow a=a'$ et $b=b'$

Exercice 26 : (absurde)
On considère l'ensemble : $A=\{1;2;3;4;...;n\}$ avec n un nombre entier impair
Et soient x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4 ;… ; x_n des éléments de l'ensemble A distincts deux a deux
Montrer que : $\exists i\in A/\ \ x_i-i$ est pair

Exercice 27 : Montrer que La proposition
$P:(\forall x\in[0;1]):x^2\ge x$ est fausse :

Exercice 28 : Montrer que La proposition
$P:(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R}):x^2+y^2\ge x+y$ est fausse :

Exercice 29 : Montrer que La proposition
$P:(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2):\sqrt{a^2+b^2}=a+b$ est fausse :

Exercice 30 : Montrer que La proposition suivante est fausse :
« Tout entier positif est somme de trois carrés »
(Les carrés sont les 0^2, 1^2, 2^2, 3^2,... Par exemple $6=1^2+1^2+2^2$.)

Exercice 31 : Montrer que La proposition
$P:(\forall x\in\mathbb{R}^*):x+\frac{1}{x}\ge 2$ est fausse :

Exercice 32 : on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x^2-x+3$ Montrer que : f n'est ni pair ni impair

Exercice 33 : Montrer que La proposition
$P:\forall(a;b;c;d)\in\mathbb{R}^4;\begin{cases}a\ne b\\ c\ne d\end{cases}\Rightarrow a+c\ne b+d$ est fausse :

Exercice 34 : Montrer que La proposition
$P:(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R}):x^2-xy+y^2=0$ est fausse

Exercice 35 : $\forall x>0\quad x+\frac{1}{x}\ge 2$

Exercice 36 : soit $x\in\mathbb{R}$ Montrer que :
$|x-1|\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{2}{5}\le\frac{1}{x+1}\le\frac{2}{3}$

Exercice 37 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E):
$\sqrt{x^2+1}=2x$

Exercice 38 : $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$
Montrer que : $|x-y|\le 2\sqrt{x^2+y^2+xy}$

Exercice 39 : 1) Montrer que :
$\left(\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}^+\right)^2\right):a+b=0\Leftrightarrow a=0$ et $b=0$

2) $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$ Montrer que:
$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=2\Leftrightarrow x=y=0$

Exercice 40 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N};3^n\ge 1+2n$.

Exercice 41 : (Récurrence) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,
$1+2+3+...+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$.

Exercice 42 : Montrer par récurrence que :pour tout entier $n\ge 5$: $2^n\ge 6n$

Exercice 43 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N};n^3+2n$ est divisible par 3

Exercice 44 : (Récurrence) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:
$\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}$.

Exercice 45 : (Récurrence) Montrer que pour tout
$n\in\mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+...+n^3=\frac{n^2\times(n+1)^2}{4}$.

Exercice 46 : (Récurrence) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:
$\sum_{k=1}^{k=n}(2k+1)=1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2$.

Exercice 47 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N};4^n+6n-1$ est divisible par 9

Exercice 48 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N};7^n-1$ est divisible par 6

Erreur classique dans les récurrences

Exercice 49 : Pour tout entier naturel n, on considère les deux propriétés suivantes :
P (n) : 10^n-1 est divisible par 9
Q (n) : 10n + 1 est divisible par 9
1) Démontrer que si P (n) est vraie alors P (n + 1) est vraie.
2) Démontrer que si Q (n) est vraie alors Q (n + 1) est vraie.
3) Un élève affirme : " Donc P (n) et Q (n) sont vraies pour tout entier naturel n.
Expliquer pourquoi il commet une erreur grave.
4) Démontrer que P (n) est vraie pour tout entier naturel n.
5) Démontrer que Q (n) est fausse pour tout entier naturel n.
On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde.

Exercice 50 : Soit P(n) la propriété dénie sur $\mathbb{N}$ par :
7^n-1 Est divisible par 3
1) Démontrer que si P(n) est vraie alors P (n + 1) est vraie.
2) Que peut-on conclure

Exercice 51 : $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que : $a \in]-1;1[$ et $b \in]-1;1[$ Montrer que : $-1 \prec \frac{a+b}{1+ab} \prec 1$

Exercice 52 : Traduisez les propositions suivantes en langage courant puis déterminer sa négation et la valeur de vérité :

1) $P:(\forall x \in \mathbb{R});(\exists y \in \mathbb{R}): x > y$

2) $P:(\exists x \in \mathbb{R});(\forall y \in \mathbb{R}): x > y$

3) $P:(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 \geq 4 \Rightarrow x \geq 2$

4) $P:(\exists x \in \mathbb{R}); x^2 = 4$

5) $P:(\forall \varepsilon \succ 0);\left(\exists x \in \left\{1+\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}\right) / x \prec \varepsilon + 10$

Exercice 53 : A l'aide de la méthode des tables de vérité, dites si la formules $P ou \overline{P}$ est une tautologies.

Exercice 54 : 1. (Raisonnement direct) Soient $a \in \mathbb{R}^+; b \in \mathbb{R}^+$

Montrer que si $a \leq b$ alors $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$ et $0 \leq \sqrt{ab} \leq b$

2. (Cas par cas) Montrer que pour tout $\forall n \in \mathbb{N}; n(n+1)$ est divisible par 2 (distinguer les n pairs des n impairs).

4. (Absurde) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Montrer que $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.

5. (Contre-exemple) Est-ce que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x < 2 \Rightarrow x^2 < 4$?

6. (Récurrence) Fixons un réel $a \in \mathbb{R}^{+*}$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; (1+a)^n \geq 1 + n \times a$.

<u>Autre exercices</u>

Exercice 1 : P, Q des propositions ; Ecrire la négation des propositions suivantes :

1. Toutes les voitures rapides sont rouges ;
2. Tout triangle rectangle possède un angle droit
3. Dans toutes les prisons tous les détenus détestent tous les gardiens
4. Pour tout entier x il existe un entier y tel que pour tout entier z la relation z < y implique la relation z < x + 1.
5. il existe un mouton écossais dont au moins un côté est noir
6. a) $(P \text{ et } Q)$ b) $(\text{non } P \text{ et non } Q)$ c) $(P \Rightarrow Q)$

Exercice 2 : Supposons que les chiens aboient et que la caravane passe. Traduisez les propositions suivantes En langage propositionnel. On note p : les chiens aboient et q : la caravane passe.

a) Si la caravane passe, alors les chiens aboient.
b) Les chiens n'aboient pas.
c) La caravane ne passe pas ou les chiens aboient.
d) Les chiens n'aboient pas et la caravane ne passe pas.

Exercice 3 : Démontrer les énoncés suivants par récurrence :

1) $\forall n \in \mathbb{N}$ $n^3 - n$ est divisible par 6

2) $\forall n \in \mathbb{N}$ $n^5 - n$ est divisible par 30

3) $\forall n \in \mathbb{N}$ $n^7 - n$ est divisible par 42

Exercice 4 : Déterminer les valeurs de vérité des propositions suivantes :

1. (3 est un nombre impair) ⇒ (6 est un nombre premier)
2. ($\sqrt{2}$ est un nombre irrationnelle) ⇒ [($\forall x \in \mathbb{R}$) ($1 + 2x < x^2$)]
3. (5 est positif) ⇒ (3 divise 18)

Exercice 5 :

1)Donner une condition nécessaire et pas suffisante pour :
a) $x \in [1,2]$
b) n divise 6

2)Donner une condition suffisante et pas nécessaire pour :
a) $x \in [1,2]$
b) n divise 6.

Exercice 6 : Etudier la vérité des propositions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}: 2x^2 + x + 3 \succ 0$
2. $\forall (a;b) \in \mathbb{Q}^{*2}: a\sqrt{2} + b \neq 0$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*: \frac{n+1}{n} \notin \mathbb{N}$

Exercice 7 : écrire la négation des propositions suivantes

$Q;(\exists x \in \mathbb{R}): x < 2 \Rightarrow x^2 \geq 2019$

$P;(\forall x \in \mathbb{R}): x \neq 2 \Rightarrow x^2 \neq 4$

Exercice 8 : Écrire à l'aide des Quantificateurs la phrase suivante :

1) « Pour tout nombre réel, son carré est positif ».

2) « Pour chaque réel, je peux trouver un entier relatif tel que leur produit soit strictement plus grand que 1 ».

3)« Pour tout entier n, il existe un unique réel x tel que $x \succ n$ ».

Exercice 9 : Ecrire avec des Quantificateurs les propositions suivantes puis dans chaque cas dire si la proposition est vraie ou fausse.

1)Tout entier naturel est pair ou impair.

2)Tout entier naturel est pair ou tout entier naturel est impair.

Exercice 10 : En utilisant le raisonnement par contraposé montrer que :

si $x \in]1:+\infty[$ et $y \in]1:+\infty[$

$x \neq y \Rightarrow x^2 - 3x \neq y^2 - 3y$

Exercice 11 : Etudier la vérité des propositions suivantes :

1. $\exists x \in \mathbb{R}: |x^2 - x| + 3x = 0$
2. $\exists x \succ 0: x^2 + 3x = 0$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien