IX. Notation exponentielle ou écriture exponentielle d'un nombre complexe non nul :

a. Définition :

• L'écriture trigonométrique de $z=[r,\alpha]=[|z|,\arg z]$ sera notée de la manière suivante

$z=[r,\alpha]=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)=re^{i\alpha}$

• $z=re^{i\alpha}$ s'appelle l'écriture exponentielle ou la forme exponentielle de z non nul

• propriétés : $\left(e^{i\alpha}\right)^n=e^{in\alpha}$; $\dfrac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}}=e^{i(\alpha-\beta)}$; $\dfrac{1}{e^{i\beta}}=e^{i\beta}$; $e^{i\alpha}\times e^{i\beta}=e^{i(\alpha+\beta)}$ avec α et β de $\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{Z}$.

b. Formules d' EULER :

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ on pose on a : $z=[1,\alpha]=\cos\alpha+i\sin\alpha$ est un nombre complexe de module 1 et d'argument α . Donc $z=\cos\alpha+i\sin\alpha=e^{i\alpha}$ d'où :

$$\left.\begin{array}{l} z=\cos\alpha+i\sin\alpha=e^{i\alpha} \\ \bar{z}=\cos\alpha-i\sin\alpha=e^{-i\alpha}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} z+\bar{z}=2\cos\alpha=e^{i\alpha}+e^{-i\alpha} \\ z-\bar{z}=2i\sin\alpha=e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} \cos\alpha=\dfrac{z+\bar{z}}{2}=\dfrac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2} \\ \sin\alpha=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}=\dfrac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}\end{array}\right.$$

formules d' EULER $\left\{\begin{array}{l} \cos\alpha=\dfrac{z+\bar{z}}{2}=\dfrac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2} \\ \sin\alpha=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}=\dfrac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}\end{array}\right.$

Remarque : avec $z=\cos\alpha+i\sin\alpha=e^{i\alpha}$

D'après formule de Moivre on a :

$$z^n=[1,\alpha]^n=\left(e^{i\alpha}\right)^n=e^{in\alpha}=\cos n\alpha+i\sin n\alpha$$

$$\left(\bar{z}\right)^n=[1,-\alpha]^n=\left(e^{-i\alpha}\right)^n=e^{-in\alpha}=\cos n\alpha-i\sin n\alpha$$

D'où :

• $e^{in\alpha}+e^{in\alpha}=z^n+\left(\bar{z}\right)^n=2\cos n\alpha$

• $e^{in\alpha}-e^{in\alpha}=z^n-\left(\bar{z}\right)^n=2i\sin n\alpha$.

• $e^{in\alpha}\times e^{in\alpha}=z^n\times\left(\bar{z}\right)^n=1$

Formules d' EULER

Leonhard EULER
(Bâle 1707, Saint-Pétersbourg 1783)

La notation i fut introduite par Euler, le grand mathématicien suisse. Dans ce livre, on notera j à la place de i, notation utilisée pour l'intensité en électricité.

Données clés	
Naissance	15 avril 1707 Bâle (Suisse)
Décès	18 septembre 1783 (à 76 ans) Saint-Pétersbourg (Russie)
Nationalité	Suisse
Champs	Mathématiques et physique
Institutions	Académie des sciences de Russie Académie de Berlin
Renommé pour	Liste complète
Signature	Leonh. Euler

c. Application linéarisation :

- **On linéarise $\cos^3 x$.**

D'après formules d'EULER : $\cos\alpha = \frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$ **d'où :**

$$\cos^3 x = \left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^3}\left(z+\bar{z}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(z^3+3z^2\bar{z}+3z\left(\bar{z}\right)^2+\left(\bar{z}\right)^3\right) = \frac{1}{8}\left(z^3+\left(\bar{z}\right)^3+3z\bar{z}\times\left(z+\bar{z}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(2\cos 3x+3\times 1\times 2\cos x\right) = \frac{1}{4}\cos 3x+\frac{3}{4}\cos x .$$

Conclusion : $\cos^3 x = 2\cos 3x + 6\cos x$.

X. Equation du deuxième degré :

01. Equation de la forme $z\in\mathbb{C}\ :\ z^2=a$ avec $a\in\mathbb{R}$:

a. Activité :

1. Résoudre les équations suivantes :

- $z\in\mathbb{C} / z^2=0$.
- $z\in\mathbb{C} / z^2=2$.
- $z\in\mathbb{C} / z^2=-2$.

2. Donner la propriété :

b. Propriété :

Soit a est un réel , ensemble des solutions de l'équation : $z\in\mathbb{C}\ :\ z^2=a$ est :

- **Si $a=0$ alors $S=\{0\}$.**
- **Si $a>0$ alors $S=\{\sqrt{a},-\sqrt{a}\}$.**
- **Si $a<0$ alors $S=\{i\sqrt{-a},-i\sqrt{-a}\}$.**

02. Equation du 2ième degré de la forme $z\in\mathbb{C} / az^2+bz+c=0$; $a\in\mathbb{R}^*$ $b\in\mathbb{R}$ et $c\in\mathbb{R}$:

a. Activité :

On considère l'équation suivante : $(F): z\in\mathbb{C} / az^2+bz+c=0$.

On a : $az^2+bz+c=a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$.

d'où : $az^2+bz+c=0 \Leftrightarrow a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=0$

$$\Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0 \quad ; (a\neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2} \quad ; (1)$$

- 1[er] cas $\Delta=0$: $(1)\Leftrightarrow\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=0\Leftrightarrow z=-\frac{b}{2a}$ donc l'équation a une solution double $z=-\frac{b}{2a}$
- 2[ième] cas $\Delta>0$: On a : $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ donc l'équation à deux solutions réelles : $z_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$; $z_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- 3[ième] cas $\Delta<0$:

Donc $-\Delta>0$ par suite : $\Delta=-1\times(-\Delta)=i^2\left(\sqrt{-\Delta}\right)^2=\left(i\sqrt{-\Delta}\right)^2$.

D'où : $(1)\Leftrightarrow\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\left(i\sqrt{-\Delta}\right)^2}{4a^2}$

$$\Leftrightarrow\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow z+\frac{b}{2a}=\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ ou } z+\frac{b}{2a}=-\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow z=-\frac{b}{2a}+\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ ou } z=-\frac{b}{2a}-\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ ou } z=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Conclusion : l'équation a deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$; $z_2=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

b. Théorème :

Equation du 2[ième] degré de la forme $z\in\mathbb{C}/az^2+bz+c=0$; $a\in\mathbb{R}^*$ $b\in\mathbb{R}$ et $c\in\mathbb{R}$ et $\Delta=b^2-4ac$ a pour solutions :

- 1[er] cas $\Delta=0$: l'équation a une solution double $z=-\frac{b}{2a}$
- 2[ième] cas $\Delta>0$: l'équation à deux solutions réelles : $z_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$; $z_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- 3[ième] cas $\Delta<0$:l'équation a deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$; $z_2=\overline{z_1}=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

c. **Remarque :**

- $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$.
- $\Delta \neq 0$ alors $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.
- $\Delta = 0$ alors $az^2 + bz + c = a(z - z_1)^2$.

d. **Application :**

On considère l'équation suivante : $(E) : z \in \mathbb{C} / z^2 + z + 1 = 0$.

1. Calculons Δ le discriminant de l'équation .

   On a $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$

2. On déduit les solutions de l'équation :

   Puis que $\Delta < 0$: l'équation a deux solutions complexes conjuguées sont :

   $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_2 = \overline{z_1} = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

XI. L'écriture complexe des transformations suivantes : translation – homothétie – rotation .

01. Vocabulaire :

Le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$.

- On considère la relation suivante : cette relation à tout point $M_{(z)}$ de (P) d'affixe z on associe le point $M'_{(z')}$ de (P) d'affixe z' .
- Cette relation est notée f ou g et appelée transformation dans le plan (P) .
- Cette transformation est représentée de la manière suivante : $f : (P) \to (P)$, $M_{(z)} \mapsto f\left(M_{(z)}\right) = M'_{(z')}$
- L'écriture : $z' = f(z)$ est appelée l'écriture complexe du transformation f

02. L'écriture complexe de certains transformation f :

A. L'écriture complexe d'une translation $f = t_{\vec{u}}$:

a. **Rappel :**

Translation : $f = t_{\vec{u}}$ est définie par pour tout point M de (P) on a : $f(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

b. **Remarque :**

$\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow Z_{\overrightarrow{MM'}} = Z_{\vec{u}} \Leftrightarrow z' - z = u$ avec $M_{(z)}$ et $M'_{(z')}$ et $\vec{u}(b)$.

c. **Propriété :**

- L'écriture complexe du translation $f = t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$ d'affixe le complexe b est $z' - z = b$ ou bien $z' = z + b$.
- Toute transformation f dans le plan complexe qui transforme $M_{(z)}$ au point $M'_{(z')}$ tel que : $z' = z + b$ est une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe le complexe b :

d. Application :

• On considère la transformation f qui associe tout point $M_{(z)}$ de (P) d'affixe z on associe le point $M'_{(z')}$ de (P) d'affixe z' tel que : $z' = z + 2 - 3i$.

1. on détermine la nature de cette transformation f :
on remarque que l'écriture complexe du translation $f = t_{\vec{u}}$ est de la forme $z' = z + b$ d'où f est une translation du vecteur $\vec{u}$ d'affixe $b = 2 - 3i$ $\left(\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$.

B. L'écriture complexe d'une homothétie $f = h(\Omega, k)$:

e. Rappel :

Homothétie : $f = h(\Omega, k)$ Ω est le centre de l'homothétie et k le rapport de l'homothétie

Homothétie : $f = h(\Omega, k)$ est définie par pour tout point M de (P) on a : $f(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$

f. Remarque :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow Z_{\overrightarrow{\Omega M'}} = Z_{k\overrightarrow{\Omega M}} \Leftrightarrow z' - \omega = k(z - \omega)$$ avec $M_{(z)}$ et $M'_{(z')}$ et $\Omega_{(\omega)}$.

g. Propriété :

• L'écriture complexe de l'homothétie $f = h(\Omega, k)$ de centre le point Ω et de rapport k non et différent de 1 ($k \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ est $z' - \omega = k(z - \omega)$ ou bien $z' = kz + b$ avec $(b = \omega - k\omega \in \mathbb{C})$.

• Toute transformation f dans le plan complexe qui transforme $M_{(z)}$ au point $M'_{(z')}$ tel que : $z' = kz + b$ est une homothétie :

- de centre le point $\Omega_{(\omega)}$,Ω est un point invariant par f c.à.d. $f(\Omega) = \Omega$ ou $\omega = k\omega + b$ d'où $\omega = \frac{b}{1-k}$
- De rapport $k \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

h. Application :

• On considère la transformation f qui associe tout point $M_{(z)}$ de (P) d'affixe z on associe le point $M'_{(z')}$ de (P) d'affixe z' tel que : $z' = 2z + 1 + i$.

1. on détermine la nature de cette transformation f :
on remarque que l'écriture complexe de la transformation f est de la forme $z' = kz + b$ d'où f est une homothétie de rapport $k = 2$ et de centre le point $\Omega_{(\omega)}$ Ω est un point invariant par f c.à.d.

$\omega = 2\omega + 1 + i$ d'où : $\omega = \frac{1+i}{1-2} = -1 - i$.

Conclusion : la transformation f est une homothétie de rapport $k = 2$ et de centre le point Ω d'affixe $\omega = -1 - i$ ou bien $f = h\left(\Omega_{(\omega=-1-i)}, 2\right)$ (le centre est le point de coordonnées $(-1, -1)$)

C. L'écriture complexe d'une rotation $f = r(\Omega,\theta)$:

i. Rappel :

Rotation : $f = r(\Omega,\theta)$ Ω est le centre de de la rotation r et θ est l'angle de la rotation r (θ est mesure)

La rotation : $f = r(\Omega,\theta)$ est définie par pour tout point $M \neq \Omega$ de (P) on a :

$$f(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \alpha \ (2\pi) \end{cases}$$ et pour Ω on a : $f(\Omega) = \Omega$ (Ω est un point invariant)

j. Remarque :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow Z_{\overrightarrow{\Omega M'}} = Z_{k\overrightarrow{\Omega M}} \Leftrightarrow z' - \omega = k(z - \omega)$$ avec $M_{(z)}$ et $M'_{(z')}$ et $\Omega_{(\omega)}$.

k. Propriété :

- L'écriture complexe de la rotation $f = r(\Omega,\theta)$ de centre le point Ω et d'angle θ est $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ ou bien $z' = ze^{i\theta} + b$ avec $\left(b = \omega - \omega e^{i\alpha} \in \mathbb{C}\right)$.
- Toute transformation f dans le plan complexe qui transforme $M_{(z)}$ au point $M'_{(z')}$ tel que : $z' = az + b$ avec $a \neq 1$ et $|a| = 1$ (ou $z' = ze^{i\theta} + b$) est une rotation :
  - ❖ de centre le point $\Omega_{(\omega)}$ Ω est un point invariant par f c.à.d. $\omega = a\omega + b$ (ou $\omega = e^{i\theta}\omega + b$) d'où : $\omega = \dfrac{b}{1-a}$ ou $\omega = \dfrac{b}{1 - e^{i\theta}}$.
  - ❖ D'angle $\arg(a)$ (2π) (ou $\theta \equiv \arg(e^{i\theta})$ (2π)) ou encore $\theta \equiv \arg\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right)$ (2π).

l. Application :

- On considère la transformation f qui associe tout point $M_{(z)}$ de (P) d'affixe z on associe le point $M'_{(z')}$ de (P) d'affixe z' tel que : $z' = -iz + 1 - i$

2. on détermine la nature de cette transformation f :

on a : $z' = -iz + 1 - i = e^{i\pi}z + (1 - i)$

on remarque que l'écriture complexe de la transformation f est de la forme $z' = ze^{i\theta} + b$ d'où f est une rotation :

- de centre $\omega = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{1-i}{1+i} = -i$ d'où le centre est le point $\Omega_{(\omega=-i)}$.
- d'angle : $\arg(e^{i\theta}) \equiv \arg(-i) \equiv -\dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.

- **Conclusion :** la transformation f est une rotation $r\left(\Omega_{(\omega=-i)}, -\dfrac{\pi}{2}\right)$ de centre est le point de coordonnées $(0,1)$.

c. Exercice :

Parmi les écritures complexes des transformations suivantes indiqué la nature et les éléments caractéristiques de chaque transformation .

1. $z' = -4z - 2 + 5i$.
2. $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z - 4 + 2i$.

Correction :

1. Pour : $z' = -4z - 2 + 5i$

l'écriture complexe une homothétie f est de la forme $z' = kz + b$ avec $k = -4 \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$ d'où f est une homothétie de rapport $k = -4$ et de centre le point $\Omega_{(\omega)}$ Ω est un point invariant par f c.à.d.

$\Omega = \Omega'$ donc $\omega' = \omega$ d'où : $\omega = -3\omega - 8 + 12i$ d'où : $\omega = \frac{-8+12i}{4} = -2 + 3i$ (on peut utiliser la relation suivante $\omega = \frac{b}{1-k} = \frac{-8+12i}{1+3} = -2 + 3i$) .

Conclusion : la transformation f est une homothétie de rapport $k = -4$ et de centre le point Ω d'affixe $\omega = 2 + 3i$ ou bien $f = h\left(\Omega_{(\omega=2+3i)}, -4\right)$ (le centre est le point de coordonnées $(2,3)$)

2. Pour $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z - 4 + 2i$.

On a : $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z - 4 + 2i = \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)z + -4 + 2i = e^{i\frac{\pi}{6}}z - 4 + 2i$.

D'où l'écriture complexe est de la forme : $z' = ze^{i\theta} + b$.

Conclusion : la transformation f est une rotation de centre le point Ω d'affixe $\omega = -4 - \sqrt{3} - (3 + 2\sqrt{3})i$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$ ou bien $f = h\left(\Omega_{(\omega=2+3i)}, -4\right)$ (le centre est le point de coordonnées $(2,3)$)

d. Résumé pour les transformations précédentes :

Rappel Transformation est :	Ecriture complexe	Transformation donnée de la forme f transforme le point $M_{(z')}$ au point $M'_{(z')}$ avec $z' = az + b$; $(a,b \in \mathbb{C})$ Le programme se limite à trois cas les valeurs de a
Translation : $f = t_{\vec{u}}$ $f(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$z' - z = b$ ou bien $z' = z + b$	1er cas $a = 1$ on a : $z' = z + b$ Nature de la transformation : f est une Translation Eléments caractéristiques : • b est l'affixe du vecteur $\vec{u}$ de la translation f .
Homothétie : $f = h(\Omega, k)$ Ω centre de l'homothétie k rapport de l'homothétie définition : $f(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$	$z' - \omega = k(z - \omega)$ ou bien $z' = kz + b$ $(b = \omega - k\omega \in \mathbb{C})$	2ième cas $a = k \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ on a : $z' = kz + b$ Nature de la transformation f : f est une Homothétie Eléments caractéristiques : • k rapport de l'homothétie f

		• $\omega=\frac{b}{1-k}=\frac{b}{1-a}$ est l'affixe du centre Ω de l'homothétie f • Remarque : Ω est invariant par f donc $f(\Omega)=\Omega$ D'où : $z'=kz+b \Leftrightarrow \omega=k\omega+b$ donc $\omega=\frac{b}{1-k}$
Rotation : $f=r(\Omega,\alpha)$ Ω centre de l'homothétie α angle de rotation définition : $f(M)=M' \Leftrightarrow$ $\begin{cases}\Omega M'=\Omega M\\ \left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)\equiv\alpha\ (2\pi)\end{cases}$	$z'-\omega=(z-\omega)e^{i\alpha}$ ou bien $z'=e^{i\alpha}z+b$ $(b=\omega-\omega e^{i\alpha})$	$3^{ième}$ cas $\lvert a\rvert=1$ on a : $z'=e^{i\alpha}z+b$ ou $z'=az+b=(\cos\alpha+i\sin\alpha)z+b$ ou $z'=(x+yi)z+b$;(avec $\lvert x+yi\rvert$) Nature de la transformation f : f est une Rotation Eléments caractéristiques : • α ou $\arg(x+yi)$ est l'angle de la rotation . • Ou $\omega=\frac{b}{1-a}=\frac{b}{1-e^{i\theta}}=\frac{b}{1-(\cos\alpha+i\sin\alpha)}=\frac{b}{1-(x+yi)}$ $\omega=\frac{b}{1-a}=\frac{b}{1-e^{i\theta}}$ est l'affixe du centre Ω de la rotation f • Remarque : ❖ Ω est invariant par f donc $f(\Omega)=\Omega$ D'où : $z'=az+b \Leftrightarrow \omega=k\omega+b$ donc $\omega=\frac{b}{1-a}$. ❖ De même : $\alpha\equiv\arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right)\ (2\pi)$

Remarque pour la rotation :

$$\begin{cases}\Omega M'=\Omega M\\ \left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)\equiv\alpha\ (2\pi)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\Omega M'}{\Omega M}=1\\ \arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right)\equiv\alpha\ (2\pi)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left|\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right|=1\\ \arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right)\equiv\alpha\ (2\pi)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\frac{z'-\omega}{z-\omega}=[1,\alpha]=e^{i\alpha}$$

$$\Leftrightarrow z'-\omega=(z-\omega)e^{i\alpha}$$

XII. la géométrie plane et Les nombres complexes

A et B et C et D et I cinq points du plan complexe tel que leurs affixes sont z_A et z_B et z_C et z_D et z_I	
• $\left\lVert \overrightarrow{AB} \right\rVert = AB = \left| z_B - z_A \right|$ • $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$ affixe de I milieu de $[AB]$	Mesure de $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right)$ est : $\overline{\left(\vec{u}\ ,\ \overrightarrow{AB}\right)} \equiv \arg(z_B - z_A)\ [2\pi]$
$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow z_C - z_A = k\left(z_B - z_A\right)$ $\Leftrightarrow \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = k \in \mathbb{R}$; $(A \neq B)$	Mesure de $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$ est : $\overline{\left(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{CD}\right)} \equiv \arg(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A})\ [2\pi]$
A et B et C sont alignés équivaut à : $(\arg(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}) \equiv \pi[2\pi]$ ou $\arg(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}) \equiv 0[2\pi]$) Remarque : $\left(\arg(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}) \equiv 0[2\pi] \text{ ou } \arg(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}) \equiv \pi[2\pi]\right)$ équivaut à $\arg(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}) \equiv 0\ [\pi]$	$Z_{\vec{w}}$ et $Z_{\vec{t}}$ affixes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a $\overline{\left(\vec{u}\ ,\ \vec{v}\right)} \equiv \arg\left(Z_{\vec{u}}\right) - \arg\left(Z_{\vec{v}}\right)\ [2\pi]$ ou $\overline{\left(\vec{u}\ ,\ \vec{v}\right)} \equiv \arg\left(\dfrac{Z_{\vec{v}}}{Z_{\vec{u}}}\right)\ [2\pi]$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut $\dfrac{Z_{\vec{u}}}{Z_{\vec{v}}} \in \mathbb{R}$ $\left(Z_{\vec{v}} \neq 0\right)$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux équivaut $\Leftrightarrow \dfrac{Z_{\vec{v}}}{Z_{\vec{u}}} = bi$;$\left(b \in \mathbb{R}^*\right)$ $\left(Z_{\vec{v}} \neq 0\right)$ $\Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{Z_{\vec{v}}}{Z_{\vec{u}}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$	A et B et C et D sont alignés ou cocycliques équivaut à $\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \dfrac{z_B - z_C}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}$
$(AB)//(CD) \Leftrightarrow \arg(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}) \equiv \pi\ [2\pi]$ ou $\arg(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}) \equiv 0\ [2\pi]$ $\Leftrightarrow \arg(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}) \equiv 0\ [\pi]$	$(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \overline{\left(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{CD}\right)} \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ $\Leftrightarrow \arg(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$

Relation complexe	Signification géométrique
L'ensemble des M d'affixe z tel que : $\left|z - z_A\right| = \left|z - z_B\right|$	1. $AM = BM$. M appartienne à la médiatrice du segment $[AB]$. 2. L'ensemble des M c'est la médiatrice du segment $[AB]$.
$\left|z - z_A\right| = k\ \ (k > 0)$	1. $AM = k$ 2. M appartienne au cercle de centre A et de rayon k .
$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[r ; \pm\dfrac{\pi}{2}\right] = re^{\pm\frac{\pi}{2}i}$	• Si $r \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ alors ABC est un triangle rectangle en A . • Si $r = 1$ alors ABC est un triangle rectangle et isocèle en A .
$\left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1$	ABC est un triangle isocèle en A .
$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1 ; \pm\dfrac{\pi}{3}\right] = e^{\pm\frac{\pi}{3}i}$	ABC est un triangle équilatéral .