Exercices avec solutions : LIMITE ET CONTINUITE

Exercice1 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}+1}{2x-1}$ 2) $\lim_{x\to+\infty} 2x^3+x^2-x+4$

3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3}$ 4) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6}$

5) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x}-x$ 6) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$

Solutions :1) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}+1}{2x-1} = \frac{3}{1} = 3$

2) $\lim_{x\to+\infty} 2x^3+x^2-x+4 = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$

3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-7x^4}{14x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{2} = -\infty$

4) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^5}{2x^6} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{x} = 0$

5) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x}-x$?

On a : $\lim_{x\to+\infty} x^2+x = +\infty$ donc : $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} = +\infty$

Et $\lim_{x\to+\infty} -x = -\infty$

on trouve une formes indéterminée : $"+\infty-\infty"$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x}-x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x}-x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}$$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}$ or $x\to+\infty$ donc $|x| = x$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+1} = \frac{1}{2}$$

6) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$ On pose $x-\frac{\pi}{4} = h$

donc $x\to\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow h\to 0$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}} = \lim_{h\to 0} \frac{\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right)}{h}$$

or : $\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan h+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan h\times\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\tan h+1}{1-\tan h}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}} = \lim_{h\to 0} \frac{2}{1-\tan h}\times\frac{\tan h}{h} = \frac{2}{1}\times 1 = 2$$

Exercice2 : (*Limites à droite et à gauche)*

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$

Etudier la limite de f en $x_0 = -1$

Solution :Déterminons $\lim_{\substack{x\to-1\\ x\succ-1}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x\to-1\\ x\prec-1}} f(x)$?

$\forall x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$

Si : $-1\prec x\prec 1$: $f(x) = \frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|} = -\frac{x+1}{x-1}$

Donc : $\lim_{\substack{x\to-1\\ x\succ-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1\\ x\succ-1}} -\frac{x+1}{x-1} = 0$

Si : $x\prec -1$: $f(x) = \frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|} = \frac{x+1}{x-1}$

Donc : $\lim_{\substack{x\to-1\\ x\prec-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1\\ x\prec-1}} \frac{x+1}{x-1} = 0$

donc : $\lim_{\substack{x\to-1\\ x\succ-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1\\ x\prec-1}} f(x) = 0$ donc : $\lim_{x\to-1} f(x) = 0$

Exercice3 : Soient les fonctions tels que :

$f(x) = \sqrt{2x+1}\left(-3x^2+x\right)$ et $g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}\left(\sqrt{x}+1\right)$

$k(x)=\dfrac{-3x+1}{x(x-2)}$ et $h(x)=\dfrac{x^2+1}{x^3}\sin x$

1)Déterminer : $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2)Déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$

3)Déterminer : $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$

4)Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de k

Solution :

1)Déterminer : $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ et $f(x)=\sqrt{2x+1}\left(-3x^2+x\right)$

$\lim\limits_{x\to 2} 2x+1=5$ et $\lim\limits_{x\to 2} -3x^2+x=-10$

Donc : $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\sqrt{5}\times(-10)=-10\sqrt{5}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+1=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2x+1}=+\infty$

Et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^2+x=\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^2=-\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

- 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$? et $g(x)=\dfrac{-2x^2+1}{(x-3)^2}\left(\sqrt{x}+1\right)$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}+1=+\infty$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^2+1}{(x-3)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^2}{x^2}=-2$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

- 2) $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$? et $g(x)=\dfrac{-2x^2+1}{(x-3)^2}\left(\sqrt{x}+1\right)$

$\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{x}+1=\sqrt{3}+1$ et $\lim\limits_{x\to 3} -2x^2+1=-17$ et

$\lim\limits_{x\to 3} (x-3)^2=0^+$ donc : $\lim\limits_{x\to 3} g(x)=-\infty$

3) $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$?.

$\lim\limits_{x\to 0} h(x)=\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+1}{x^2}\dfrac{\sin x}{x}$

Or $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}=1$ et puisque : $\lim\limits_{x\to 0} x^2+1=1$ et

$\lim\limits_{x\to 0} x^2=0^+$

et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+1}{x^2}=+\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=+\infty$

4) $k(x)=\dfrac{-3x+1}{x(x-2)}$ donc : $D_k=]-\infty;0[\cup]0;2[\cup]2;+\infty[$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3x+1}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3x+1}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to 0} -3x+1=1$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^2-2x=0$

Etude du signe de : x^2-2x

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2-2x=0^-$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} x^2-2x=0^+$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} k(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} k(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 2} -3x+1=-5$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} x^2-2x=0^+$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} x^2-2x=0^-$

Donc : $\lim\limits_{x\to 2^+} k(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} k(x)=+\infty$

Exercice4 : Considérons la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-6x+5}{x-1}; si...x\neq 1 \\ f(1)=-4 \end{cases}$

1) Déterminer Df 2) a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

b) Comparer $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ et $f(1)$

Solution :1) $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

2)a)

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-6x+5}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x-5)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1} x-5=-4$

2) b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$

On dit que f est continue en $x_0=1$

Exercice5 : Considérons la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^2+x-12}{x-3}$; $si\ x\neq 3$ et $f(3)=7$

Etudier la est continuité de f en $x_0=3$

Solution : on a : $f(x)=\dfrac{x^2+x-12}{x-3}=x+4$ D.EC

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3} x+4=7=f(3)$

Alors : $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)$

Donc :f est continue en $x_0=3$

Exercice6 : Considérons la fonction f définie

Par : $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x}$; $si\ x\neq 0$ et $f(0)=\frac{1}{2}$

Etudier la est continuité de f en $x_0=0$

Solution :

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}+1\right)\tan x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}\times\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=1\times\frac{1}{2}=f(0)$$

Alors : $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$

Donc : f est continue en $x_0=0$

Exercice7 : Considérons la fonction f définie

Par : $f(x)=\frac{\sin(x-2)}{x^2-2x}$; $si\ x\neq 0$ et $x\neq 2$ et $f(2)=\frac{1}{2}$

Etudier la est continuité de f en $x_0=2$

Solution : $\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x}\frac{\sin(x-2)}{x-2}=\frac{1}{2}=f(2)$ Alors :

$\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$ Donc : f est continue en $x_0=2$

Exercice8 : Considérons la fonction f définie

Par : $\begin{cases} f(x)=\frac{\sin(\pi x)}{x-1};si...x\neq 1 \\ f(1)=m \end{cases}$

avec m paramètre réel

déterminer la valeur du réel m pour laquelle

f est continue en $x_0=1$

Solution : $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)}{x-1}$

on pose : $h=x-1$ $\quad x\to 1 \Leftrightarrow h\to 0$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(\pi(h+1))}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(\pi h+\pi)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-\sin(\pi h)}{\pi h}\pi=-\pi$$

donc f est continue en $x_0=1$ ssi $m=-\pi$

Exercice9 : Considérons la fonction f définie par

$f(x)=2+x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$; $si\ x\neq 0$ et $f(0)=2$

Etudier la est continuité de f en $x_0=0$

Solution : $x\in\mathbb{R}^*$ $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leq 1$ donc :

$\left|f(x)-2\right|=x^2\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leq x^2$ et on a $\lim_{x\to 0}x^2=0$

Alors : $\lim_{x\to 0} f(x)=2=f(0)$

Donc : f est continue en $x_0=0$

Exercice10 : Soit f définie sur **R** par :

$\begin{cases} f(x)=x^2;si...x\leq 0 \\ f(1)=2+x;si...x\succ 0 \end{cases}$

Etudier la est continuité de f en $x_0=0$

Solution : $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+}x^2=0=f(0)$

donc f est continue à gauche de $x_0=0$

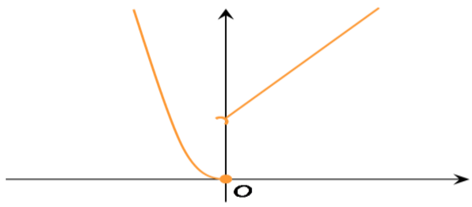
$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}2+x=2\neq f(0)$

donc f n'est pas continue à droite de 0

Et on a : $\lim_{x\to 0^+} f(x)\neq\lim_{x\to 0^-} f(x)$

Donc, la limite en 0 n'existe pas.

Conséquence : f est discontinue en 2



Graphiquement : La courbe de f ne peut être tracée sur un intervalle comprenant 0, « sans lever le crayon ».

Exercice11 : Soit f définie par :

$\begin{cases} f(x)=3-x^2;si...x\leq 0 \\ f(x)=\frac{x^2-3}{2x-1};si...x\succ 0 \end{cases}$

Etudier la est continuité de f en $x_0=0$

Solution : $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-3}{2x-1}=3=f(0)$

donc f est continue à droite de $x_0=0$

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}3-x^2=3=f(0)$

donc f est continue à gauche de $x_0=0$

donc f est continue en $x_0=0$

Exercice12 : Considérons la fonction f définie

Par : $\begin{cases} f(x)=\frac{2x+1}{7-3x};si...x\leq 2 \\ f(x)=\frac{x^2+x-6}{x-2};si...x\succ 2 \end{cases}$

Etudier la est continuité de f en $x_0=2$

Solution : on a : $f(2)=\frac{2\times2+1}{7-3\times2}=\frac{5}{7-3\times2}=5$

$\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\frac{x^2+x-6}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^+}\frac{(x-2)(x+3)}{x-2}$

$\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+} x+3=5=f(2)$

Donc f est continue adroite de f en $x_0=2$

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\frac{2x+1}{7-3x}=\frac{5}{1}=5=f(2)$

Donc f est continue gauche en $x_0=2$

Donc f est continue en $x_0=2$

Exercice13 : Soit la fonction :

$f:x\mapsto\frac{x^2-1}{|x-1|}$ si $x\neq1$ et $f(1)=2$

Etudier la la continuité de f en $x_0=1$

Solution : $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\succ1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\succ1}}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\succ1}} x+1=2=f(1)$

donc f est continue à droite de $x_0=1$

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\prec1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\prec1}}-\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\succ1}}-(x+1)=-2\neq f(1)$

donc f n'est pas continue à gauche de $x_0=1$

donc f n'est pas continue en $x_0=1$

On 2dit que f est discontinue en $x_0=1$

Exercice14 : Soit la fonction h définie par

$f(x)=\frac{x^3+1}{x^2+3x+2}$

1- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2- Déterminer la limite $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$, f est-elle continue en $x_0=-1$?

3- Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=f(x);si...x\neq-1\\ f(-1)=3\end{cases}$$

a) Déterminer D_f

b) Etudier la continuité de la fonction f en $x_0=-1$ La fonction f s'appelle un prolongement par continuité de la fonction de f en -1

4- Peut-on prolonger f par continuité en $a=-2$

Solution : 1)

$x\in D_f \Leftrightarrow x^2+3x+2\neq0 \Leftrightarrow x\neq-1$ et $x\neq-2$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{-1;-2\}$

2) $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x^2+3x+2}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x+2)}$

$\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-x+1}{x+2}=3$

$-1\notin D_f$ donc f n'est pas continue en $x_0=-1$

3) a) $\begin{cases} f(x)=f(x);si...x\neq-1\\ f(-1)=3\end{cases}$ donc : $D_f=\mathbb{R}-\{-2\}$

b) $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=3=f(-1)$

donc f est continue en $x_0=-1$

4) $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x^2+3x+2}$?

$\lim\limits_{x\to-2^+} x^3+1=-7$

$\lim\limits_{x\to-2^+} x^2+3x+2=0^-$ donc : $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=+\infty$

Donc on ne peut pas prolonger f par continuité en $a=-2$

Exercice15 : Soit f une fonction définie par

$f(x)=\frac{1-\cos x}{x}$ Donner un prolongement par continuité de la fonction f en $x_0=0$

Solution : $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}\times x=0$

Car : $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

Donc La fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=f(x);si...x\neq0\\ f(0)=0\end{cases}$$

Est une prolongement par continuité de la fonction f en $x_0=0$

Exercice 16 : Etudier la la continuité des $f$onctions suivantes :

1) $h(x)=\sqrt{x^2+x+3}$ 2) $g(x)=\frac{x^4+x^3-6}{x^2+2x-3}$

3) $t(x)=\tan x$

Solution :1) $h(x)=\sqrt{x^2+x+3}$

x^2+x+3 Est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une

Fonction polynôme
de plus ($\forall x \in \mathbb{R}$)($x^2+x+3 \geq 0$)
(Son discriminant Δ est négatif)
Donc h est continue sur $\mathbb{R}$

2) $g(x)=\dfrac{x^4+x^3-6}{x^2+2x-3}$ est continue sur :
$]-\infty,-3[$ et sur $]-3,1[$ et sur $]1,+\infty[$.

3) La fonction **t** est continue sur tous le intervalles de la forme : $]-\pi/2+k\pi\,;\pi/2+k\pi[$
(Où $k \in \mathbb{Z}$)

Exercice 17 : Etudier la la continuité des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\cos(2x^2-3x+4)$

2) $g(x)=\sqrt{\dfrac{x}{1+\sin^2 x}}$ 3) $h(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$

Solution :1) Soit f une fonction définie par $f(x)=\cos(2x^2-3x+4)$

Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}$
Puisque les fonctions : $f_1 : x \to 2x^2-3x+4$ et $f_2 : x \to \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$
Et $f_1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ alors : $f = f_2 \circ f_1$ est continue sur $\mathbb{R}$

2) Soit g une fonction définie par
$g(x)=\sqrt{\dfrac{x}{1+\sin^2 x}}$ Montrons que g est continue sur $\mathbb{R}^+$ On a : $D_g=[0;+\infty[$ et Puisque la fonction :
$g_1 : x \to \dfrac{x}{1+\sin^2 x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et
$g_1(\mathbb{R}^+)=\mathbb{R}^+$ et $g_2 : x \to \sqrt{x}$ sont continue sur $\mathbb{R}^+$
Donc : $g=g_2 \circ g_1$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

3) $h(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car
$x \to x^2+1$ est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc : $x \to \dfrac{1}{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$
et ($\forall x \in \mathbb{R}$) ($\dfrac{1}{x^2+1} \in \mathbb{R}$) et sin est continue sur $\mathbb{R}$

Exercice 18 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2}\pi\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\pi\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\right)$

Solution :1)
Soient : $f : x \to \dfrac{1-\cos x}{x^2}\pi$ et $g : x \to \sin x$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\pi=\dfrac{\pi}{2}$ g est continue sur $\mathbb{R}$

Donc continue en $x_0=\dfrac{\pi}{2}$ donc :

$\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2}\pi\right)=s\,\text{in}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$

2) puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\pi\sqrt{\dfrac{1-1/x}{1-1/x}}=\pi$

Et la fonction : $x \to \cos x$ continue en π

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\pi\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\right)=\cos\pi=-1$

Exercice19 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\cos\left(\dfrac{\pi\tan x}{3x}\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\left(\dfrac{\pi x^2-4x+3}{4x^2+7}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\sin\sqrt{\dfrac{2x^2}{1-\cos x}}$

Solution :1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi\tan x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi}{3}\dfrac{\tan x}{x}=\dfrac{\pi}{3}$

et Puisque : $x \to \cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$

Donc continue en $x_0=\dfrac{\pi}{3}$ donc :

$\lim\limits_{x\to 0}\cos\left(\dfrac{\pi\tan x}{3x}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi x^2-4x+3}{4x^2+7}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi x^2}{4x^2}=\dfrac{\pi}{4}$

et Puisque : $x \to \sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$

Donc continue en $x_0=\dfrac{\pi}{4}$ donc :

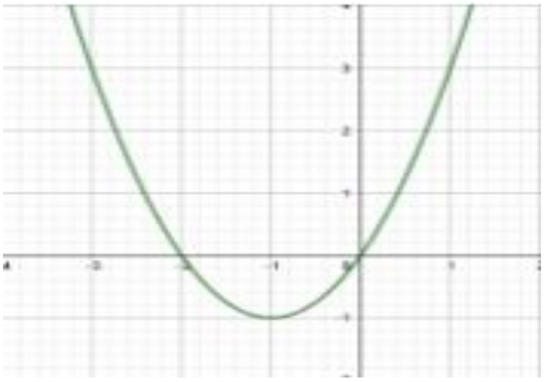
donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\left(\dfrac{\pi x^2-4x+3}{4x^2+7}\right)=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3) on a : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{0}$ donc : $\lim\limits_{x\to 0}2\dfrac{x^2}{1-\cos x}=4$

donc : $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{2x^2}{1-\cos x}}=2 : x \to \sqrt{x}$ est continue en 4

donc : $\lim\limits_{x\to 0}\sin\sqrt{\dfrac{2x^2}{1-\cos x}}=\sin 2$ car : $x \to \sin x$ est continue en 2

Exercice20 : Le graphe ci-contre est le graphe de la fonction $f(x)=x^2+2x$



Déterminer graphiquement les images des intervalles : $[-1,2]$, $[0,2[$; $]-1,0]$

$[2,+\infty[$; $]-\infty,1]$

Solution : Graphiquement en a : $f([-1,2])=[-1,3]$

$f([0,2[)=[-1,0]$ $\qquad f(]-1,0])=[0,3[$

$f([2,+\infty[)=[0,+\infty[$ $\qquad f(]-\infty,1])=[-1,+\infty[$

Exercice21 : Soit f une fonction définie par

$f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$

Déterminer les images des intervalles suivants :
[0,1] ; [−2,-1[;] − 1, 1] ; [2, +∞[

Solution : $D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2+3=5\succ 0$ donc : ***f*** continue et strictement croissante sur les intervalles $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$ donc on a : $f([0;1])=[f(0);f(1)]=\left[-3;\dfrac{-1}{2}\right]$

$$f([-2;-1[)=\left[f(-2);\lim_{\substack{x\to-1\\x\prec-1}}f(x)\right[=[7;+\infty[$$

$$f(]-1;1])=\left]\lim_{\substack{x\to-1\\x\succ-1}}f(x);f(1)\right]=\left]-\infty;\dfrac{-1}{2}\right]$$

$$f([2;+\infty[)=\left[f(2);\lim_{x\to+\infty}f(x)\right[=\left[\dfrac{1}{3};2\right[$$

Exercice22 : Montrer que l'équation :

$4x^3-3x-\dfrac{1}{2}=0$ admet une racine dans chacune des intervalles suivants : $\left]-1;-\dfrac{1}{2}\right[$; $\left]-\dfrac{1}{2};0\right[$ et $]0;1[$

Solution : on considère la fonction : g tel que

$g(x)=4x^3-3x-\dfrac{1}{2}$

- On a : g est est continue sur sur $\mathbb{R}$ (car c'est une fonction polynôme) donc continue sur tout intervalle de $\mathbb{R}$
  - Et on a : $g(-1)=-\dfrac{3}{2}$ et $g\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$ donc :

    $g\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times g(-1)\prec 0$ donc :d'après le **(T.V.I)**

il existe $\alpha_1\in\left]-1;-\dfrac{1}{2}\right[$ tel que : $g(\alpha_1)=0$

  - Et on a : $g(0)=-\dfrac{1}{2}$ et $g\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$ donc :

    $g\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times g(0)\prec 0$ donc :d'après le **(T.V.I)**

il existe $\alpha_2\in\left]-\dfrac{1}{2};0\right[$ tel que : $g(\alpha_2)=0$

  - Et on a : $g(0)=-\dfrac{1}{2}$ et $g(1)=\dfrac{1}{2}$ donc :

    $g(1)\times g(0)\prec 0$ donc :d'après le **(T.V.I)**

il existe $\alpha_3\in]0;1[$ tel que : $g(\alpha_3)=0$

donc l'équation : $4x^3-3x-\dfrac{1}{2}=0$ admet 3 racines différentes dans chacune des intervalles: $\left]-1;-\dfrac{1}{2}\right[$; $\left]-\dfrac{1}{2};0\right[$ et $]0;1[$

Exercice23 : Montrer que l'équation :

$x^3+x+1=0$

Admet une racine unique dans $]-1;0[$

Solution : on considère la fonction : f tel que

$f(x)=x^3+x+1$

- On a : f est est continue sur sur $\mathbb{R}$ (car c'est une fonction polynôme) donc continue sur $]-1;0[$
- on a : $f(-1)=-1$ et $f(0)=1$ donc :

  $f(1)\times f(-1)\prec 0$
- $f'(x)=3x^2+1\succ 0$ sur $]-1;0[$ donc f strictement croissante sur $]-1;0[$

Donc : d'après le **(T.V.I)** l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $]-1;0[$

Exercice24 : Montrer que l'équation : $\cos x = x$ Admet au moins une racine dans intervalle : $I=[0;\pi]$

Solution : $\cos x = x \Leftrightarrow \cos x - x = 0$

On pose : $f(x)=\cos x - x$

- On a : f est est continue sur sur $\mathbb{R}$ (car c'est la différence de deux fonctions continues) donc continue sur $I=[0;\pi]$
- on a : $f(\pi)=-1-\pi<0$ et $f(0)=1$ donc : $f(0)\times f(\pi)<0$

Donc : d'après le **(T.V.I)**

il existe $\alpha \in]0;\pi[$ tel que : $f(\alpha)=0$

Exercice25 : Montrer que l'équation : $1+\sin x = x$ Admet au moins une racine dans intervalle : $I=\left[\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right]$

Solution : $1+\sin x = x \Leftrightarrow 1+\sin x - x = 0$

On pose : $f(x)=1+\sin x - x$

- On a : f est est continue sur sur $\mathbb{R}$ (car c'est la différence de deux fonctions continues) donc continue sur $I=\left[\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right]$
- on a : $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4-\pi}{2}\succ 0$ et

$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{6+3\sqrt{3}-4\pi}{6}\prec 0$ donc : $f\left(\frac{\pi}{2}\right)\times f\left(\frac{2\pi}{3}\right)<0$

Donc : d'après le **(T.V.I)**

il existe $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right[$ tel que : $f(\alpha)=0$

Exercice26 : on considère la fonction : f tel que $f(x)=x^3+x-1$

1) Montrer que l'équation : $f(x)=0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$

2) Montrer que l'équation : $f(x)=0$ admet une solution unique $\alpha \in]0;1[$

3) étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$

Solution :

1)a)On a : f est est continue sur $\mathbb{R}$ (car c'est une fonction polynôme)

b) $f'(x)=3x^2+1\succ 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f strictement croissante sur $\mathbb{R}$

c) on a : $f(\mathbb{R})=f(]-\infty;+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x);\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$

$=]-\infty;+\infty[$ et on a : $0\in f(\mathbb{R})$

donc d'après le **(T.V.I)** l'équation**)** l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$

1) on a f est est continue sur $[0;1]$ et

$f(0)\times f(1)\prec 0$ ($f(0)=-1$ et $f(1)=1$)

et f strictement croissante sur $[0;1]$

Donc : d'après le **(T.V.I)** l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $\alpha \in]0;1[$

3) étudions le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$

1cas : si $x\le\alpha$ alors $f(x)\le f(\alpha)$(car f strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Donc $f(x)\le 0$ (car $f(\alpha)=0$)

2cas : si $x\ge\alpha$ alors $f(x)\ge f(\alpha)$(car f strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Donc $f(x)\ge 0$ (car $f(\alpha)=0$)

Exercice27 : Soit f la fonction définie par :

$f(x)=\frac{x-3}{x+2}$

1) Montrer que la fonction g la restriction de f sur intervalle $I=]-2;+\infty[$ admet une fonction réciproque g^{-1}définie sur un J qu'il faut déterminer.

2) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x de l'intervalle J

Solution : 1) $f(x)=\frac{x-3}{x+2}$ $\quad D_f=\{x\in\mathbb{R}/x+2\neq 0\}$

$D_f=\mathbb{R}-\{-2\}$

$$f'(x)=\left(\frac{x-3}{x+2}\right)'=\frac{(x-3)'(x+2)-(x-3)(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{1(x+2)-1\times(x-3)}{(x+2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{5}{(x+2)^2}>0$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow 1$

puisque g est strictement croissante et continue **sur :** $I =]-2;+\infty[$

donc g admet une fonction réciproque g^{-1}définie sur $J = g(I) = g(]-2;+\infty[) =]-\infty;1[$

2) $\begin{cases} g(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = g^{-1}(x) \\ x \in g(I) \end{cases}$

$\begin{cases} g(y) = x \\ y \in]-2;+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{y-3}{y+2} = x \Leftrightarrow y-3 = x(y+2)$

$\Leftrightarrow y - xy = 2x+3 \Leftrightarrow y(1-x) = 2x+3$

$\Leftrightarrow \ y = \dfrac{2x+3}{1-x}$ Donc $g^{-1}(x) = \dfrac{2x+3}{1-x}$

Donc : $\begin{array}{l} g^{-1} :]-\infty;1[\to]-2;+\infty[\\ x \to g^{-1}(x) = \dfrac{2x+3}{1-x} \end{array}$

Exercice 28: Soit f la fonction définie sur $I = \left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par : $f(x) = \sqrt{2x-1}$

1) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1}définie sur un J qu'il faut déterminer.

2) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de l'intervalle J

3)Représenter (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ dans le même repére orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

Solution : 1) $D_f = \left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[= I$

$\forall x \in \left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[\ f'(x) = \left(\sqrt{2x-1}\right)' = \dfrac{(2x-1)'}{2\sqrt{2x-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}} > 0$

x	$1/2$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$

Donc : f est strictement croissante et continue **sur :** $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[= I$

donc f admet une fonction réciproque f^{-1}

définie sur $J = f(I) = f\left(\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[\right) = [0;+\infty[$

2) $\begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in f(I) \end{cases}$

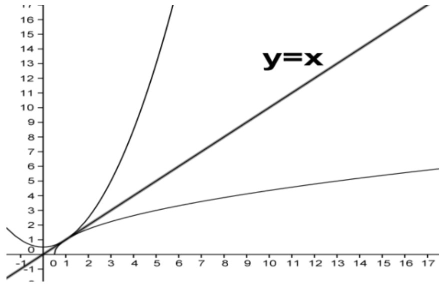
$\begin{cases} f(y) = x \\ y \in [0;+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{2y-1} = x \Leftrightarrow 2y-1 = x^2$

$\Leftrightarrow 2y = x^2+1 \Leftrightarrow y = \dfrac{x^2+1}{2}$

Donc $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2+1}{2}$

Donc : $\begin{array}{l} f^{-1} : [0;+\infty[\to \left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[\\ x \to f^{-1}(x) = \dfrac{x^2+1}{2} \end{array}$

3) $(C_{f^{-1}})$ et (C_f) sont symétriques par rapport à :(Δ) $y = x$



Exercice29 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $x^5 = 32$ **2)** $x^7 = -128$ **3)** $x^4 = 3$ **4)** $x^6 = -8$

Solutions :1) $x^5 = 32$ **donc** $x > 0$

$x = \sqrt[5]{32} \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{2^5} \Leftrightarrow x = 2$ **donc :** $S = \{2\}$

2) $x^7 = -128$ donc $x < 0$

Donc : $x = -\sqrt[7]{128} \Leftrightarrow x = -\sqrt[7]{2^7} \Leftrightarrow x = -2$

Donc : $S = \{-2\}$

3) $x^4 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{3}$ ou $x = -\sqrt[4]{3}$

Donc : $S = \left\{-\sqrt[4]{3}; \sqrt[4]{3}\right\}$

4) $x^6 = -8$

On a $x^6 \geq 0$ et $-8 < 0$ donc $S = \Phi$

Exercice30 : simplifier les expressions suivantes :1) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3$ 2) $\sqrt[2]{\sqrt[4]{2}}$

3) $A = \sqrt[5]{32} - \left(\sqrt[7]{2}\right)^7 + \sqrt[3]{\sqrt[3]{512}} + \dfrac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$

4) $B = \dfrac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[5]{16} \times \sqrt{\sqrt[3]{4}} \times \sqrt[15]{2}}{\sqrt[15]{256}}$

5) $C=\dfrac{(27)^{\frac{2}{9}}\times(81)^{\frac{1}{4}}\times 9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}}$ 6) $D=\sqrt[6]{\dfrac{2^5\times128000000}{27^2}}$

7) $E=\dfrac{\sqrt[5]{2}\times\sqrt{8}}{\sqrt{\sqrt[5]{128}}}$ 8) $F=\dfrac{\sqrt[3]{4}\times\sqrt{8}\times\left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^2}{\sqrt{\sqrt[3]{4}}}$

Solutions :1) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3=2$ 2) $\sqrt[2]{\sqrt[4]{2}}=\sqrt[2\times4]{2}=\sqrt[8]{2}$

2) $A=\sqrt[5]{32}-\left(\sqrt[7]{2}\right)^7+\sqrt[3]{\sqrt[3]{512}}+\dfrac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}=\sqrt[5]{2^5}-2+\sqrt[3]{\sqrt[3]{2^9}}+\sqrt[4]{\dfrac{96}{3}}$

$$A=2-2+\sqrt[9]{2^9}+\sqrt[5]{32}=2-2+2+2=4$$

3) $B=\dfrac{\sqrt[3]{2}\times\sqrt[5]{16}\times\sqrt[6]{4}\times\sqrt[15]{2}}{\sqrt[15]{256}}=\dfrac{\sqrt[3]{2}\times\sqrt[5]{2^4}\times\sqrt[6]{2^2}\times\sqrt[15]{2}}{\sqrt[15]{256}}$

4)

$$B=\frac{2^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{4}{5}}\times2^{\frac{2}{6}}\times2^{\frac{1}{15}}}{\sqrt[15]{2^8}}=\frac{2^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{4}{5}}\times2^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{1}{15}}}{2^{\frac{8}{15}}}=\frac{2^{\frac{23}{15}}}{2^{\frac{8}{15}}}=2^{\frac{23}{15}-\frac{8}{15}}=2^{\frac{15}{15}}=2$$

5) $C=\dfrac{(27)^{\frac{2}{9}}\times(81)^{\frac{1}{4}}\times9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}}=\dfrac{\left(3^3\right)^{\frac{2}{9}}\times\left(3^4\right)^{\frac{1}{4}}\times\left(3^2\right)^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}}=\dfrac{3^{\frac{2}{3}}\times3^1\times3^5}{3^{\frac{17}{3}}}$

$$C=\frac{3^{\frac{20}{3}}}{3^{\frac{17}{3}}}=3^{\frac{20}{3}-\frac{17}{3}}=3^{\frac{3}{3}}=3^1=3$$

6) $D=\sqrt[6]{\dfrac{2^5\times128000000}{27^2}}=\sqrt[6]{\dfrac{2^5\times2^7\times10^6}{\left(3^3\right)^2}}=\sqrt[6]{\dfrac{10^6}{3^6}\times2^{12}}=$

$$D=\sqrt[6]{\left(\frac{10}{3}\right)^6}\times\sqrt[6]{\left(2^2\right)^6}=\frac{10}{3}\times2^2=\frac{40}{3}$$

7)

$$E=\frac{\sqrt[5]{2}\times\sqrt{8}}{\sqrt{\sqrt[5]{128}}}=\frac{\sqrt[5]{2}\times\sqrt{2^3}}{\sqrt[10]{2^7}}=\frac{\sqrt[10]{2^2}\times\sqrt[10]{2^{15}}}{\sqrt[10]{2^7}}$$

$$=\frac{\sqrt[10]{2^{17}}}{\sqrt[10]{2^7}}=\sqrt[10]{2^{10}}=2$$

8) $F=\dfrac{\sqrt[3]{4}\times\sqrt{8}\times\left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^2}{\sqrt{\sqrt[3]{4}}}=\dfrac{4^{\frac{1}{3}}\times8^{\frac{1}{2}}\times\left(\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2}{\left(4^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}$

$$F=\frac{4^{\frac{1}{3}}\times8^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{2}{4}}}{4^{\frac{1}{6}}}=\frac{2^{\frac{2}{3}}\times2^{\frac{3}{2}}\times2^{\frac{2}{4}}}{2^{\frac{2}{6}}}=2^{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}+\frac{2}{4}-\frac{1}{3}}=2^{\frac{7}{3}}$$

$$F=2^{2+\frac{1}{3}}=2^2\times2^{\frac{1}{3}}=4\sqrt[3]{2}$$

Exercice31 : comparer : $\sqrt[5]{2}$ et $\sqrt[7]{3}$

Solutions : on a : $\sqrt[n\times m]{x^m}=\sqrt[n]{x}$

$\sqrt[7]{3}=\sqrt[7\times5]{3^5}=\sqrt[35]{243}$ et $\sqrt[5]{2}=\sqrt[7\times5]{2^7}=\sqrt[35]{128}$

On a : $\sqrt[35]{243}>\sqrt[35]{128}$ car $243>128$

Donc **:** $\sqrt[7]{3}>\sqrt[5]{2}$

Exercice 32 : résoudre dans $\mathbb{R}$:

1) $\sqrt[5]{3x-4}=2$ 2) $\left(\sqrt[5]{x}\right)^2-5\sqrt[5]{x}+6=0$

Solutions :1)

$\sqrt[5]{3x-4}=2\Leftrightarrow\left(\sqrt[5]{3x-4}\right)^5=(2)^5\Leftrightarrow3x-4=32$

$\Leftrightarrow x=12$ donc : $S=\{12\}$

2) $\left(\sqrt[5]{x}\right)^2-5\sqrt[5]{x}+6=0$ on pose : $\sqrt[5]{x}=X$

L'équation devient : $X^2-5X+6=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times1\times6=25-24=1>0$

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=3$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=2$

Donc : $\sqrt[5]{x}=3$ ou $\sqrt[5]{x}=2$

Donc : $x=243$ ou $x=32$

Donc : $S=\{32;243\}$

Exercice 33 : calcules les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to2}\sqrt[5]{x^3+24}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^5+2x^3-x+4}$

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$ 4) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$

5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{2x+6}-\sqrt{x+3}}{x-1}$ 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-2}}$

7) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt{x-1}}$

Solutions :

1) $\lim\limits_{x\to2}\sqrt[5]{x^3+24}=\sqrt[5]{2^3+24}=\sqrt[5]{8+24}=\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^5+2x^3-x+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^5}=\sqrt[3]{+\infty}=+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)''$ FI

On a : $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2\right)}{x\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2\right)}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3-(1)^3}{x\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x+1-1}{x\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2}=\frac{1}{1+1\times1+1}=\frac{1}{3}$$

4) $\lim_{x\to8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}=\left(\frac{0}{0}\right)''$ FI

On a : $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$

$$\lim_{x\to8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}=\lim_{x\to8}\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-2^3}{(x-8)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\times\sqrt[3]{x}+2^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to8}\frac{x-8}{(x-8)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\times\sqrt[3]{x}+2^2\right)}=\lim_{x\to8}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\times\sqrt[3]{x}+4}=\frac{1}{12}$$

5) $$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{2x+6}-\sqrt{x+3}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{2x+6}-2}{x-1}-\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2x+6-8}{(x-1)\left(\left(\sqrt[3]{2x+6}\right)^2+2\times\sqrt[3]{2x+6}+2^2\right)}-\frac{x+3-4}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2}{\left(\sqrt[3]{2x+6}\right)^2+2\times\sqrt[3]{2x+6}+2^2}-\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}-\frac{1}{4}=\frac{-1}{12}$$

6)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[6]{(x+1)^3}}{\sqrt[6]{\left(x^2-2\right)^2}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[6]{\frac{(x+1)^3}{\left(x^2-2\right)^2}}=0$$

Car : $\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^3}{\left(x^2-2\right)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

7) $$\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt[4]{(x-1)^2}}=\lim_{x\to1^+}\sqrt[4]{\frac{x^2-1}{(x-1)^2}}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\sqrt[4]{\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-1)}}=\lim_{x\to1^+}\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}=+\infty$$

Car : $\lim_{x\to1^+}x+1=2$ et $\lim_{x\to1^+}x-1=0^+$

Exercice34 : simplifier les expressions suivantes :1) $A=\frac{\sqrt[3]{1024}\times\sqrt[5]{3200000}}{\sqrt[4]{64}\times\sqrt[3]{\sqrt{252}}\times\sqrt{18}}$

2) a)comparer : $\sqrt[5]{4}$ **et** $\sqrt[4]{3}$

b) comparer : $\sqrt[3]{28}$ et $\sqrt{13}$

c) comparer : $\sqrt[5]{23}$ et $\sqrt[15]{151}$

Solutions :1)

$$A=\frac{\sqrt[3]{1024}\times\sqrt[5]{3200000}}{\sqrt[4]{64}\times\sqrt[3]{\sqrt{252}}\times\sqrt{18}}=\frac{\sqrt[3]{2^{10}}\times\sqrt[5]{2^{10}\times10^5}}{\sqrt[4]{2^6}\times\sqrt[3]{\sqrt{2^8}}\times\sqrt{2\times3^2}}$$

$$A=\frac{2^{\frac{10}{3}}\times2\times10}{2^{\frac{1}{4}}\times2^{\frac{4}{3}}\times3\times2^{\frac{1}{2}}}=20$$

2) a)comparaison de : $\sqrt[5]{4}$ et $\sqrt[4]{3}$

on a $\sqrt[n\times m]{x^m}=\sqrt[n]{x}$

et on a : $\sqrt[4]{3}=\sqrt[4\times5]{3^5}=\sqrt[20]{243}$ et $\sqrt[5]{4}=\sqrt[4\times5]{4^4}=\sqrt[20]{256}$

donc $\sqrt[5]{4}>\sqrt[4]{3}$ car $256>243$

b)comparaison de : $\sqrt[3]{28}$ et $\sqrt{13}$

on a $\sqrt[3]{28}=\sqrt[6]{28^2}=\sqrt[6]{784}$ et

$\sqrt{13}=\sqrt[2]{13}=\sqrt[2\times3]{13^3}=\sqrt[6]{2197}$

on a $\sqrt[6]{2197}>\sqrt[6]{784}$ car $\sqrt{13}>\sqrt[3]{28}$

b)comparaison de : $\sqrt[15]{151}$ et $\sqrt[5]{23}$

$\sqrt[5]{23}=\sqrt[15]{23^3}=\sqrt[15]{12167}$

Donc : $\sqrt[5]{23}>\sqrt[15]{151}$

Exercice35 :1) Rendre le dénominateur rationnel

$a=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}-2}$ $\quad b=\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$ $\quad c=\frac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5}}$

$d=\frac{1}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}$

2) Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x}-1}$ $\quad$ b) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+1}-x$

Solutions :1)

$a=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}-2}$ on utilise : $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$

$$a=\frac{3\sqrt{2}\left(\sqrt[3]{2}^2+2\sqrt[3]{2}+2^2\right)}{\left(\sqrt[3]{2}-2\right)\left(\sqrt[3]{2}^2+2\sqrt[3]{2}+2^2\right)}=\frac{3\sqrt{2}\left(\sqrt[3]{2}^2+2\sqrt[3]{2}+2^2\right)}{\sqrt[3]{2}^3-2^3}$$

$$a=\frac{3\sqrt{2}\left(\sqrt[3]{2}^3+2\sqrt[3]{2}+2^2\right)}{-6}=-\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt[3]{2}^3+2\sqrt[3]{2}+2^2\right)}{2}$$

$$b=\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}=\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\left(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}\times1+1^2\right)}$$

$$b=\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3-1^3}=\sqrt[3]{2}-1$$

$$c=\frac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5}}=\frac{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2}}{\left(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5}\right)\left(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2}\right)}$$

$$c=\frac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5}}=\frac{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2}}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3-\left(\sqrt[3]{5}\right)^3}=-\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25}}{3}$$

$$d=\frac{1}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}=\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2^2}}$$

$$d=\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}{\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2^2}\right)}=\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}{\left(\sqrt[3]{5}\right)^3-\left(\sqrt[3]{2}\right)^3}$$

$$d=\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}{3}$$

2) a) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x}-1}$ on utilise :

$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\times1+1^2\right)}{\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}\right)\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\times1+1^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-2(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\times1+1\right)}{\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}\right)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-1^3\right)}=\lim_{x\to1}\frac{-2\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\times1+1\right)}{\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}\right)}=\frac{-6}{2}=\frac{-3}{2}$$

b)

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}-x\right)\left(\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3+1}\times1+x^2\right)}{\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3+1}\times1+x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3+1}\times1+x^2}=0$$

Exercice36 : Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[4]{20x^2-4}-2}{2x^2+x-3}$$

Solutions :

On sait que $a^4-b^4=(a-b)\left(a^3+a^2b+ab^2+b^3\right)$

Il en résulte : $a-b=\frac{a^4-b^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}$

Par suite :$(\forall x\in\mathbb{R}^+)(\forall y\in\mathbb{R}^{*+})$

$$\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=\frac{x-y}{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2y}+\sqrt[4]{xy^2}+\sqrt[4]{y^3}}$$

$$\frac{\sqrt[4]{20x^2-4}-2}{2x^2+x-3}=\frac{\sqrt[4]{20x^2-4}-\sqrt[4]{16}}{2x^2+x-3}$$

$$=\frac{20x^2-4-16}{\left(2x^2+x-3\right)\left(\sqrt[4]{\left(20x^2-4\right)^3}+\sqrt[4]{\left(20x^2-4\right)^2 4}+\sqrt[4]{\left(20x^2-4\right)16}+\sqrt[4]{16^3}\right)}$$

$$=\frac{20(x+1)}{(2x+3)\left(\sqrt[4]{\left(20x^2-4\right)^3}+\sqrt[4]{\left(20x^2-4\right)^2 4}+\sqrt[4]{\left(20x^2-4\right)16}+\sqrt[4]{16^3}\right)}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[4]{20x^2-4}-2}{2x^2+x-3}=\frac{1}{8}$

Exercice37: 1)simplifier les expressions suivantes : $A=\frac{\sqrt[15]{3^5}\times\sqrt[3]{9}\times\left(\sqrt[5]{9}\right)^3}{\sqrt[5]{3}}$

et $B=\frac{\sqrt[4]{9}\times\sqrt{\sqrt[3]{3^3\times\sqrt{9}}}}{\sqrt[5]{81}\times\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

a) $\sqrt[3]{x-1}=3$ b) $x^{\frac{2}{3}}-7x^{\frac{1}{3}}-8=0$

c) $\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}-12=0$

2)Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[5]{x^5+x^2+1}$ b) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x+1}-1}$

Solution :

$$A=\frac{\sqrt[15]{3^5}\times\sqrt[3]{9}\times\left(\sqrt[5]{9}\right)^3}{\sqrt[5]{3}}=\frac{\left(3^5\right)^{\frac{1}{15}}\times\left(3^2\right)^{\frac{1}{3}}\times\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^3}{3^{\frac{1}{5}}}=\frac{3^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{2}{3}}\times3^{\frac{3}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}}$$

$$A=\frac{3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}}=\frac{3^{\frac{8}{3}}}{3^{\frac{1}{5}}}=3^{\frac{8}{3}-\frac{1}{5}}=3^{\frac{37}{15}}=\left(\sqrt[15]{3}\right)^{37}$$

$$B=\frac{\sqrt[4]{9}\times\sqrt{\sqrt[3]{3^3}\times\sqrt{9}}}{\sqrt[5]{81}\times\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}=\frac{\left(3^2\right)^{\frac{1}{4}}\times\left(3^4\right)^{\frac{1}{6}}}{\left(3^4\right)^{\frac{1}{5}}\times(3)^{\frac{1}{8}}}=\frac{3^{\frac{1}{2}}\times3}{\left(3^4\right)^{\frac{1}{5}}\times(3)^{\frac{1}{8}}}$$

$$B=\frac{3^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{4}{5}}\times(3)^{\frac{1}{8}}}=3^{\frac{3}{2}}\times3^{-\frac{4}{5}}\times(3)^{-\frac{1}{8}}=3^{\frac{3}{2}-\frac{4}{5}-\frac{1}{8}}=3^{\frac{11}{8}-\frac{4}{5}}=3^{\frac{55}{40}-\frac{32}{40}}$$

$$B=3^{\frac{23}{40}}=\sqrt[40]{3^{23}}$$

2) a) $\sqrt[3]{x-1}=3\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^3=3^3\Leftrightarrow x-1=27$

$\Leftrightarrow x=28$ donc : $S=\{28\}$

b) $x^{\frac{2}{3}}-7x^{\frac{1}{3}}-8=0\Leftrightarrow\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2-7x^{\frac{1}{3}}-8=0$

on pose : $x^{\frac{1}{3}}=X$ donc : $X^2-7X-8=0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4\times1\times(-8) = 49+32 = 81 > 0$

$x_1 = \frac{7+9}{2\times1} = \frac{16}{2} = 8$ et $x_2 = \frac{7-9}{2\times1} = \frac{-2}{2} = -1$

Donc : $x^{\frac{1}{3}} = 8$ ou $x^{\frac{1}{3}} = -1$

$x^{\frac{1}{3}} = -1$ n'a pas de solutions

$x^{\frac{1}{3}} = 8 \Leftrightarrow \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = (8)^3 \Leftrightarrow x = 512$

Donc : $S = \{512\}$

c) $\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} - 12 = 0$ on a $x \geq 0$

$\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} - 12 = 0 \Leftrightarrow \sqrt[6]{x^3} - \sqrt[6]{x^2} - 12 = 0$

on pose : $\sqrt[6]{x} = X$ donc : $X^3 + X^2 - 12 = 0$

on remarque que 2 est racine de cette équation

donc : $X^3 + X^2 - 12 = (X-2)(X^2 + 3X + 6)$

$X^3 + X^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow X = 2$ ou $X^2 + 3X + 6 = 0$

$\Delta = -15 \prec 0$ donc $X^2 + 3X + 6 = 0$ n'a pas de solutions

Donc : $X = 2 \Leftrightarrow \sqrt[6]{x} = 2 \Leftrightarrow x = 2^6 = 64$

Donc : $S = \{64\}$

2) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[5]{x^5 + x^2 + 1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[5]{x^5} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x-1}$ on a $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

b) $\lim\limits_{x\to1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + 1\times\sqrt[3]{x} + 1^2\right)}{(x-1)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + 1\times\sqrt[3]{x} + 1^2\right)}$

$= \lim\limits_{x\to1} \frac{\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 - 1^3\right)}{(x-1)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + 1\times\sqrt[3]{x} + 1^2\right)} = \lim\limits_{x\to1} \frac{x-1}{(x-1)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + 1\times\sqrt[3]{x} + 1^2\right)}$

$\lim\limits_{x\to1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} \frac{1}{\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + 1\times\sqrt[3]{x} + 1^2\right)} = \frac{1}{1+1\times1+1} = \frac{1}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x+1} - 1} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2 + 1\times\sqrt[3]{x+1} + 1^2\right)}{(\sqrt[3]{x+1} - 1)\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2 + 1\times\sqrt[3]{x+1} + 1^2\right)}$

$= \lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2 + 1\times\sqrt[3]{x+1} + 1^2\right)}{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3 - (1)^3} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2 + 1\times\sqrt[3]{x+1} + 1^2\right)}{x}$

$= \lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{x}\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2 + 1\times\sqrt[3]{x+1} + 1^2\right) = 1\times3 = 3$

Exercice38 : Considérons la fonction f définie par : $f(x) = x\cos\frac{1}{x}$; $si\ x \neq 0$ et $f(0) = 0$

1)Etudier la continuité de f en $x_0 = 0$

2) Etudier la continuité de f sur les intervalles $]0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$ et est ce f est continue sur $\mathbb{R}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **Solution :** 1) $x \in \mathbb{R}^*$ $\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$

donc : $|x|\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$ donc : $\left|x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$

donc : $-|x| \leq f(x) \leq |x|$

et puisque : $\lim\limits_{x\to0}|x| = 0$ et $\lim\limits_{x\to0} -|x| = 0$

Alors : $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0 = f(0)$

Donc : f est continue en $x_0 = 0$

2)on a la fonction : $f_1 : x \to \frac{1}{x}$ continue sur les intervalles $]0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$ et les fonctions : $f_2 : x \to \cos x$ et $f_3 : x \to x$ sont continués sur les intervalles $]0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$

Donc : $f = f_3 \times (f_2 \circ f_1)$ est continue sur les intervalles $]0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$

Et puisque : f est continue en $x_0 = 0$

Alors f est continue sur $\mathbb{R}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$?

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $x \to \cos x$ est continue en $x_0 = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\frac{1}{x} = \cos 0 = 1$

Et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cos\frac{1}{x} = +\infty$

Exercice39 : soient f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ tels que f est bornée et g continue sur $\mathbb{R}$;Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées sur $\mathbb{R}$

Solution :1) f est bornée sur $\mathbb{R}$ donc il existent deux réels m et M tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$

$m \leq f(x) \leq M$

Donc : $f(x)\in[m;M]\ \forall x\in\mathbb{R}$

Donc : $g(f(x))\in g([m;M])\ \forall x\in\mathbb{R}$

et puisque g est continue sur $\mathbb{R}$ alors
g est continue sur $[m;M]$ donc il existent deux réels a et b tel que $g([m;M])=[a;b]$

donc $g(f(x))\in[a;b]\ \forall x\in\mathbb{R}$

donc $a\le g(f(x))\le b\ \forall x\in\mathbb{R}$

donc $a\le(g\circ f)(x)\le b\ \forall x\in\mathbb{R}$

Donc $g\circ f$ sont bornée sur $\mathbb{R}$

2)la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ donc :
$g(\mathbb{R})=I$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$

et puisque f est bornée sur $\mathbb{R}$ Donc :
$f(y)\in[m;M]\ \forall y\in I$

Donc : $f(g(x))\in[m;M]\ \forall x\in\mathbb{R}$

Donc : $m\le(f\circ g)(x)\le M\ \forall x\in\mathbb{R}$

Donc $f\circ g$ sont bornée sur $\mathbb{R}$

Exercice 40: Considérons la fonction f continue Sur l'intervalle $[a;b]$ et x_1 et x_2 et x_3 des nombres de l'intervalle $[a;b]$

Montrer que l'équation :
$3f(x)=f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)$ admet au moins une solution dans $[a;b]$

Solution :

On considéré la fonction g définie sur $[a;b]$ par
$g(x)=3f(x)-(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3))$

la fonction g est continue sur l'intervalle $[a;b]$

soit $f(\alpha)$ le plus petit des nombres $f(x_1);f(x_2)$; $f(x_3)$ et soit $f(\beta)$ le plus grand des nombres $f(x_1);f(x_2)$ et $f(x_3)$

On a : $g(\alpha)=3f(\alpha)-(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3))$

$g(\alpha)=(f(\alpha)-f(x_1))+(f(\alpha)-f(x_2))+(f(\alpha)-f(x_3))$

Donc : $g(\alpha)\le 0$

De même **:** on a : $g(\beta)=3f(\beta)-(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3))$

$g(\alpha)=(f(\beta)-f(x_1))+(f(\beta)-f(x_2))+(f(\beta)-f(x_3))$

Donc : $g(\beta)\ge 0$

et puisque g est continue sur $[a;b]$

Donc : d'après le **(T.V.I)** il existe un réel c dans $[a;b]$ tel que : g(c) = 0

Cad $3f(c)=f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)$

Donc l'équation $3f(x)=f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)$ admet au moins une solution dans $[a;b]$

Exercice41 : soient f et g sont deux fonctions continues sur $[a;b]$ tels que :

$0\prec g(x)\prec f(x)\quad\forall x\in[a;b]$

Montrer que :
$\exists\lambda\in\mathbb{R}_+^*/\forall x\in[a;b];(1+\lambda)g(x)\le f(x)$

Solution : Montrons que :
$\exists\lambda\in\mathbb{R}_+^*/\forall x\in[a;b];(1+\lambda)g(x)\le f(x)$ Cad :

$\exists\lambda\in\mathbb{R}_+^*/\forall x\in[a;b];\lambda\le\dfrac{f(x)}{g(x)}-1$

On considéré la fonction h définie sur $[a;b]$ par

$h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}-1$ la fonction h est continue sur l'intervalle $[a;b]$ car f et g sont continues sur l'intervalle $[a;b]$ et $g(x)\ne 0\ \forall x\in[a;b]$ Donc la fonction h admet un minimum λ Cad il existe $x_0\in[a;b]$ tel que :

$\lambda=h(x_0)=\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}-1$ et $\lambda\le h(x)\quad\forall x\in[a;b]$

On a : $0\prec g(x_0)\prec f(x_0)$ donc $0\prec\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}-1$

donc : $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$ donc :
$\exists\lambda\in\mathbb{R}_+^*/\forall x\in[a;b];(1+\lambda)g(x)\le f(x)$

Exercice 42: Considérons la fonction f continue Sur l'intervalle $[a;b]$ tel que : $f(a)\prec 0$

il existe $x_0\in]a;b[$ tel que : $f(x_0)=\dfrac{a-x_0}{b-x_0}$

Solution :

On a : $f(x_0)=\dfrac{a-x_0}{b-x_0}\Leftrightarrow(b-x_0)f(x_0)-(a-x_0)=0$

On considéré la fonction g définie par :
$g(x)=(b-x)f(x)-(a-x)$;la fonction g est continue sur l'intervalle $[a;b]$car c'est la somme de fonctions continues sur $[a;b]$

On a : $g(a)=(b-a)f(a)\prec 0$ car $f(a)\prec 0$

Et $b-a\succ 0$ et on a : $g(b)=b-a\succ 0$

Donc : d'après le **(T.V.I)** il existe $x_0\in]a;b[$ tel que : $g(x_0)=0$ cad $f(x_0)=\dfrac{a-x_0}{b-x_0}$

Exercice 43 : Soit la fonction $f(x)=x^2+x+1$ définie sur $\mathbb{R}$.

1- Déterminer $J=f([0,1])$

2- Montrer que f admet une fonction réciproque de J vers [0,1] et déterminer $f^{-1}(x)$ $\forall x\in J$

Exercice 44 : Soit la fonction $g(x)=x-2\sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}^+$.

1- Montrer que g est strictement croissante sur [1, +∞[puis déterminer $J=g([1,+\infty[)$

2- Montrer que g admet une fonction réciproque de J vers [1, +∞[et déterminer $g^{-1}(x)$ $\forall x\in J$

Exercice 45 : Soit la fonction $h(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$

Montrer que h est une bijection de] − 1,1[vers un intervalle J qu'il faut déterminer et déterminer et déterminer $h^{-1}(x)$ $\forall x\in J$

Exercice 46 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation: $\sqrt[3]{x}-x=0$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$\sqrt[3]{x}-5\sqrt[6]{x}+6=0$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :
$\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x-2}\succ 1$

Exercice 47:

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^4=16$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(x-1)^3=-27$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe. C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien