

Les polynômes

1) Définition d'un polynôme

a) L'expression : $V(x) = x^3 + 8x^2 + 15x$ est appelée polynôme de degré 3. On note $\deg(V) = 3$.

Les réels 1, 8, 15, 0 sont appelés coefficients du Polynôme $V(x)$.

$8x^2$ est un monôme de degré 2 et de coefficient 8.

x^3 est un monôme, de degré 3 et de coefficient 1.

$15x$ est un monôme, de degré 1 et de coefficient 15.

b) Un polynôme est une somme de monômes.

Un polynôme de la variable x sera noté souvent $P(x)$,

$Q(x)$, ... Le degré du polynôme P , noté $\deg P$, est celui de son monôme de plus haut degré.

c) **Remarque et exemples :**

- $P(x) = 3x^4 + x^3 - 7x + \sqrt{3}$ Est un polynôme de degré 4 ordonné suivant les puissances décroissantes. Son terme constant (le terme sans la variable x) est $\sqrt{3}$

- $R(x) = x^3 + 3x^2 - \frac{2}{x} - 1$ n'est pas un polynôme

- $E(x) = \sqrt{x} + x^2 - 3$ n'est pas un polynôme

- $F(x) = 2 = 2x^0$ Est un polynôme de degré 0 et

S'appelle un polynôme constant

- un monôme c'est un polynôme qui s'écrit sous la forme :

$$M(x) = ax + b$$

- un polynôme de degré 2 s'appelle un trinôme

Donc un trinôme c'est un polynôme qui s'écrit sous la forme : $T(x) = ax^2 + bx + c$

Avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$

d) Deux polynômes P et Q sont égaux et on écrit $P = Q$ si

si $P(x) = Q(x)$ Pour tout x réel

e) Deux polynômes P et Q sont égaux

si et seulement si ils ont le même degré et les coefficients de leurs monômes de même degré sont égaux.

2) opérations sur les polynômes

a) **La somme de deux polynômes :**

Soient P et Q deux polynômes

La somme de P et Q est un polynôme noté $P + Q$

tel que : $(P+Q)(x) = (P)(x) + (Q)(x)$

pour tous $x \in \mathbb{R}$

et $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P); \deg(Q))$

b) **Le produit d'un polynôme par un réel :**

Soient P un polynôme et $\alpha \in \mathbb{R}^*$

Le produit de P par un réel α est un polynôme noté αP et tel que : $(\alpha P)(x) = \alpha \times (P)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

et $\deg(\alpha P) = \deg(P)$

c) **Le produit de deux polynômes :**

Soient P et Q deux polynômes non nuls

Le produit de P et Q est un polynôme noté PQ

et tel que : $(PQ)(x) = (P)(x) \times (Q)(x)$ $x \in \mathbb{R}$

et : $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$

3) La division euclidienne d'un polynôme par $x - a$ et factorisation

a) Soient P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ et soit $a \in \mathbb{R}$. Il existe un unique polynôme Q de degré $n - 1$ et tq : $P(x) = (x - a)Q(x) + P(a)$ Pour tous $x \in \mathbb{R}$. Cette égalité est la division euclidienne de $P(x)$ par $x - a$

$Q(x)$ est le quotient et $P(a)$ le reste

b) Soient P un polynôme et soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que a est racine du polynôme P ssi $P(a) = 0$

c) Soient P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $a \in \mathbb{R}$. a est racine du polynôme P ssi $P(x)$ est divisible par $x - a$.

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

