Les polynômes

Leçon : les polynômes

Présentation globale

I) Définition d'un polynôme

Activité :Soit un parallélépipède rectangle dont les dimensions : x ,**x + 3** et **x + 5** avec **x** réel strictement positif. Soit *V(x)* le volume de ce parallélépipède

1)Montrer que $V(x) = x^3 + 8x^2 + 15x$

2)Calculer V(1) *et* V(2)*?*

3)Quelles opérations as-tu utilisé pour calculer V(1) *et* V(2) ?

1)Vocabulaire

L'expression : $V(x) = x^3 + 8x^2 + 15x$ est appelée polynôme de degré 3

On note deg (V) = 3.

Les réels 1, 8, 15,0 sont appelés coefficients du polynôme V(x).

$8x^2$ est un monôme de degré 2 et de coefficient 8.

x^3 est un monôme, de degré 3 et de coefficient 1.

15x est un monôme, de degré 1 et de coefficient 15.

2)Définition : Un polynôme est une somme de monômes.

Un polynôme de la variable x sera noté souvent $P(x)$,$Q(x)$, ... Le degré du polynôme P, noté degP, est celui de son monôme de plus haut degré.

3)Remarque et exemples :

1) $P(x) = 3x^4 + x^3 - 7x + \sqrt{3}$ est un polynôme de degré 4 donc deg (P) = 4.

Il est ordonné suivant les puissances décroissantes. Son terme constant (le terme sans la variable x) est $\sqrt{3}$

2) $Q(x) = 2x^2(x-2) + (x-1)(2x+3)$

$Q(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x^2 + 3x - 2x - 3$

$R(x) = 2x^3 - 2x^2 + x - 3$ Donc deg (Q) = 3.

3) $R(x) = x^3 + 3x^2 - \frac{2}{x} - 1$ n'est pas un polynôme

4) $E(x) = \sqrt{x} + x^2 - 3$ n'est pas un polynôme

5) $F(x) = 2 = 2x^0$ est un polynôme de degré 0 et S'appelle un polynôme constant

6) $M(x) = 2x + 6$ est un polynôme de degré 1 et s'appelle un monôme

Donc un monôme c'est un polynôme qui s'écrit sous la forme : $M(x) = ax + b$

7) un polynôme de degré 2 s'appelle un trinôme

Donc un trinôme c'est un polynôme qui s'écrit sous la forme : $T(x) = ax^2 + bx + c$

Avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$

Application : Déterminer un polynôme P de degré 2 tel que :

$P(0) = P(1) = 5$ et $P(-2) = 3$

Solution : P de degré 2 donc P s'écrit sous la forme :

$P(x) = ax^2 + bx + c$

On a $P(0) = 5$ donc $a \times 0^2 + b \times 0 + c = 5$ donc $c = 5$

On a $P(1) = 5$ donc $a \times 1^2 + b \times 1 + c = 5$ donc $a + b + c = 5$ donc $a + b + 5 = 5$ donc $a + b = 0$ ①

On a $P(-2) = 3$ donc $a \times (-2)^2 + b \times (-2) + 5 = 3$ donc $4a - 2b + 5 = 3$

donc $4a - 2b = -2$ ②

donc On a le système suivant : $\begin{cases} 4a - 2b = -2 \\ a + b = 0 \end{cases}$ donc

$\begin{cases} 4a - 2b = -2 \\ b = -a \end{cases}$ donc $4a + 2a = -2$ donc $6a = -2$ donc

$a = -\frac{1}{3}$ donc $b = \frac{1}{3}$ Alors : $P(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 5$

4)Egalité de deux polynômes

Définition. Deux polynômes P et Q sont égaux et on écrit P = Q ssi . $P(x) = Q(x)$ pour tout x réel

Propriété. Deux polynômes P et Q sont égaux si et seulement si ils ont le même degré et les coefficients de leurs monômes de même degré sont égaux.

Exemple : Lesquels des polynômes ci-dessous sont égaux ? Expliquez

$P(x)=2x^3-2x^2+x-3$ et

$Q(x)=2x^2(x-2)+(x-1)(2x+3)$ et

$R(x)=2x^3+3x^2-2x-3$

Solution :

$Q(x)=2x^2(x-2)+(x-1)(2x+3)=2x^3-4x^2+2x^2+3x-2x-3$

$Q(x)=2x^3-2x^2+x-3$ deg (Q) = 3

$P(x)=2x^3-2x^2+x-3$ deg (P) =3

Donc : $P(x)=Q(x)$ car deg (P) = deg (Q) et les coefficients de leurs monômes de même degré sont égaux

Mais $P(x)\neq R(x)$ car les coefficients de leurs monômes de même degré ne sont pas égaux

Application: soit : $P(x)=x^4-2x^3+x^2-1$ et

$Q(x)=ax^5+(b+c)x^4+(c+d)x^3+dx^2+e$

Déterminer a ; b ; c et d pour que : $P=Q$

Solution : $P=Q$ c a d $P(x)=Q(x)$ donc On a le système suivant :

$$\begin{cases} a=0 \\ b+c=1 \\ c+d=-2 \\ d=1 \\ c=-1 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} a=0; d=1; c=-1 \\ c=-2-d=-2-1=-3 \\ b=1-c=1+3=4 \end{cases}$$

donc $Q(x)=x^4-2x^3+x^2-1$

II) Les polynômes et les opérations

1)Activité : soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes

I)Calculer dans chacun des cas suivants :

$P(x)+Q(x)$; $P(x)-Q(x)$; $3P(x)-2Q(x)$

1) $P(x)=x^3+2x^2-1$; $Q(x)=3x^4-x^3+x$

2) $P(x)=x^5-x^2+3$; $Q(x)=-x^5+x^2-5$

II) Calculer $P(x)\times Q(x)$ **et** $(P(x))^2$ dans chacun des cas suivants et comparer :

deg (PQ) et deg (P) +deg (Q)

1) $P(x)=x^2-1$; $Q(x)=x^2+2x-3$

2) $P(x)=x^4-x^2+2$; $Q(x)=3x+2$

Solution : I) 1) $P(x)=x^3+2x^2-1$;

$Q(x)=3x^4-x^3+x$

On a : $P(x)+Q(x)=x^3+2x^2-1+3x^4-x^3+x$

donc $P(x)+Q(x)=3x^4+2x^2+x-1$

On a : $P(x)-Q(x)=x^3+2x^2-1-3x^4+x^3-x$

$P(x)-Q(x)=-3x^4+2x^3+2x^2-x-1$

$3P(x)-2Q(x)=3(x^3+2x^2-1)-2(3x^4-x^3+x)$

$3P(x)-2Q(x)=3x^3+6x^2-3-6x^4+2x^3-2x$

$3P(x)-2Q(x)=-6x^4+5x^3+6x^2-2x-3$

$\deg(P)=3$; $\deg(Q)=4$; $\deg(P+Q)=4$;

$\deg(P-Q)=4$

I) 2) $P(x)=x^5-x^2+3$; $Q(x)=-x^5+x^2-5$

On a : $P(x)+Q(x)=x^5-x^2+3-x^5+x^2-5=-2$

On a : $P(x)-Q(x)=x^5-x^2+3+x^5-x^2+8=2x^5-2x^2+8$

$3P(x)-2Q(x)=3(x^5-x^2+3)-2(-x^5+x^2-5)$

$3P(x)-2Q(x)=3x^5-3x^2+9+2x^5-2x^2+10$

$3P(x)-2Q(x)=5x^5-5x^2+19$

$\deg(P)=5$; $\deg(Q)=5$; $\deg(P+Q)=0$;

$\deg(P-Q)=5$

II) 1) on a $P(x)=x^2-1$; $Q(x)=x^2+2x-3$

$P(x)\times Q(x)=(x^2-1)(x^2+2x-3)=x^5+2x^4-3x^3-x^2-2x+3$

$(P(x))^2=(x^2-1)^2=(x^2)^2-2x^2\times1+1=x^4-2x^2+1$

2) $P(x)=x^4-x^2+2$; $Q(x)=3x+2$

$P(x)\times Q(x)=(3x+2)(x^4-x^2+2)=3x^5+2x^4-3x^3-2x^2+6x+4$

$(P(x))^2=(x^4-x^2+2)^2=(x^4-x^2+2)(x^4-x^2+2)$

$(P(x))^2=(x^4-x^2+2)^2=x^8-2x^6+5x^4-4x^2+4$

$\deg(P\times Q)=5$ $\deg(P)=4$; $\deg(Q)=1$

Donc $\deg(P\times Q)=\deg(P)+\deg(Q)$ et

$\deg(P^2)=2\deg(P)$

2)Résumé :

a) La somme de deux polynômes :

Soient P et Q deux polynômes

La somme de P et Q est un polynôme noté $P+Q$

tel que : $(P+Q)(x)=(P)(x)+(Q)(x)$

pour tous $x\in\mathbb{R}$

Remarque : $\deg(P+Q)\le\max(\deg(P);\deg(Q))$

b) Le produit d'un polynôme par un réel :

Soient P un polynôme et $\alpha\in\mathbb{R}^*$

Le produit de P par un réel α est un polynôme noté αP et tel que : $(\alpha P)(x)=\alpha\times(P)(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Remarque : $\deg(\alpha P)=\deg(P)$

c) Le produit de deux polynômes :

Soient P et Q deux polynômes non nuls

Le produit de P et Q est un polynôme noté PQ et tel que : $(PQ)(x)=(P)(x)\times(Q)(x)$ $x\in\mathbb{R}$

Remarque : $\deg(PQ)=\deg(P)+\deg(Q)$

III) La division par $x-a$ et factorisation de polynômes

1) *La division euclidienne d'un polynôme par* $x-a$

Propriétés : Soient P un polynôme de degré $n\in\mathbb{N}$ et soit $a\in\mathbb{R}$

Il existe un unique polynôme Q de degré $n-1$ et tq :

$P(x)=(x-a)Q(x)+P(a)$ Pour tous $x\in\mathbb{R}$

Cette égalité est la division euclidienne de $P(x)$ par $x-a$

$Q(x)$ est le quotient et $P(a)$ le reste

Exemple : Soit : $P(x)=x^3+3x^2-2x-6$ et $a=-3$

$$\begin{array}{r|l} x^3+3x^2-2x-6 & x+3 \\ \hline -x^3-3x^2 \quad\quad\quad & x^2-2 \\ \hline -2x-6 & \\ 2x+6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

On a donc :

$P(x)=(x+3)Q(x)+P(-3)=(x+3)(x^2-2)+0=(x+3)(x^2-2)$

$Q(x)=x^2-2$ est le quotient et $P(-3)=0$ le reste

Remarques : en remplaçons x par **-3** dans le polynôme : $P(x)=x^3+3x^2-2x-6$

$P(-3)=(-3)^3+3(-3)^2-2(-3)-6=-27+27+6-6=0$

On dit que **-3** est racine du polynôme $P(x)$

3)Le reste de la division de $P(x)$ par $x+3$ est 0. on dit que le polynôme $P(x)$ est divisible par $x+3$.

2)Racine d'un polynôme :

Définition : Soient P un polynôme et soit $a\in\mathbb{R}$

On dit que a est racine du polynôme P ssi $P(a)=0$

Exemple : Soit : $P(x)=x^3-2x^2+1$

1) $P(1)=1^3-2\times1^2+1=1-2+1=0$ donc 1 est racine du polynôme P

2) $P(2)=2^3-2\times2^2+1=8-8+1=1\neq0$ donc 1 n'est pas une racine du polynôme P

Propriété : Soient P un polynôme de degré $n\in\mathbb{N}^*$ et soit $a\in\mathbb{R}$. a est racine du polynôme P ssi $P(x)$ est divisible par $x-a$.

Exemple : Soit : $P(x)=x^3-3x^2-6x+8$

On a $P(1)=1^3-3\times1^2-6\times1+8=1-3-6+8=0$

donc 1 est racine du polynôme P

Donc $P(x)$ est divisible par $x-1$

Effectuons la division euclidienne de $P(x)$ par $x-1$

On trouve : $P(x)=(x-1)(x^2-2x-8)$ ①

On pose : $Q(x)=x^2-2x-8$

on a : $Q(-2)=(-2)^2-2(-2)-8=4+4-8=0$

Donc **-2** est racine du polynôme Q Donc $Q(x)$ est divisible par $x+2$

Effectuons la division euclidienne de $Q(x)$ par $x+2$

On trouve : $Q(x)=(x+2)(x-4)$ ②

D'après ① et ② on a **:**

$P(x)=(x-1)(x+2)(x-4)$

$P(x)=0$ ssi $(x-1)(x+2)(x-4)=0$ ssi

$x-1=0$ ou $x+2=0$ ou $x-4=0$

$P(x)=0$ ssi $x=1$ ou $x=-2$ ou $x=4$ les racines du polynôme $P(x)$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien