Tronc CS **PROF : ATMANI NAJIB**

La droite dans le plan

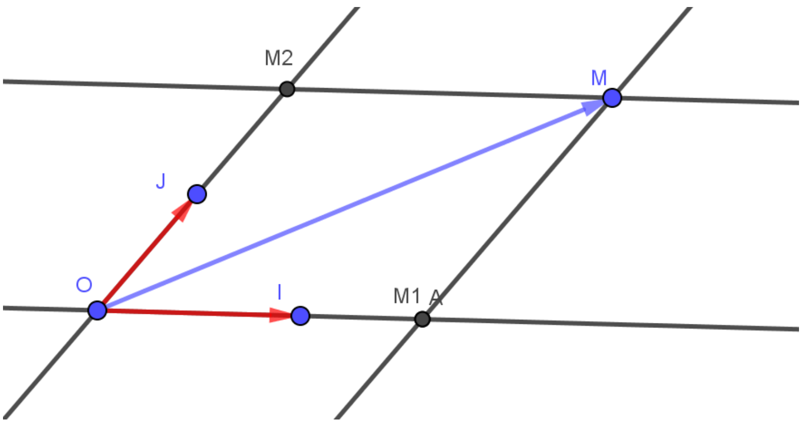
Leçon : droite dans le plan
Présentation globale

I) Repère et coordonnées d'un point et coordonnées d'un vecteur

Activité :

Soient O. I et J trois points non alignés dans le plan P.
Et soit M un point quelconque du plan
1)Construire le point M_1 la projection de M sur (OI) parallèlement a (OJ) et le point M_2 la projection de M sur (OJ) parallèlement a (OI)
2)soit x l'abscisse de M_1 sur l'axe gradué (OI) et y l'abscisse de M_2 sur l'axe (OJ)

a) Ecrire $\overrightarrow{OM_1}$ en fonction de $\overrightarrow{OI}$ et écrire $\overrightarrow{OM_2}$ en fonction de $\overrightarrow{OJ}$
b) En déduire $\overrightarrow{OM}$ en fonction de $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$
<u>Réponse :</u> 1)



$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M}$

2) a) on a : x l'abscisse de M_1 sur l'axe gradué (OI) donc $\overrightarrow{OM_1} = x\overrightarrow{OI}$

Et on a : y l'abscisse de M_2 sur l'axe (OJ) donc $\overrightarrow{OM_2} = y\overrightarrow{OJ}$

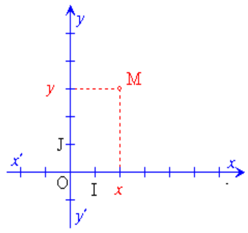
b) dans le quadrilatère OM_1MM_2 : $(OM_1) \parallel (MM_2)$ et $(OM_2) \parallel (MM_1)$

Donc OM_1MM_2 est un parallélogramme

Et par suite : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ alors $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$

1) Le Repère dans le plan :

Soient O. I et J trois points non alignés dans le plan P.
Le triplet (O ; I ; J) détermine un Repère dans le plan. On le note R (O ; I ; J) ou R
Le point O est l'origine du Repère (O ; I ; J)
La droite (O I) est l'axe des abscisses du Repère (O ; I ; J)
La droite (O J) est l'axe des ordonnées du Repère (O ; I ; J)
Si les droites (O I) et (O J) sont perpendiculaires ont dit que le Repère est orthogonal
Si on a OI =OJ = 1 ont dit que le Repère (O ; I ; J) est normé
Si les droites (O I) et (O J) sont perpendiculaires et si on a OI =OJ = 1
ont dit que le Repère (O ; I ; J) est orthonormé
On pose $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ on note alors le Repère (O ; I ; J) par $(O;\vec{i};\vec{j})$



2) Les coordonnées d'un point :

Propriété et définition : Le plan est rapporté au Repère (O ; I ; J)
Pour tout point M du plan il existe un unique couple (x,y) tel que $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$
et $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$
Le couple (x,y) est le couple de coordonnée de M et on note : $M(x,y)$
x est l'abscisse du point M et y est l'ordonnée du point M

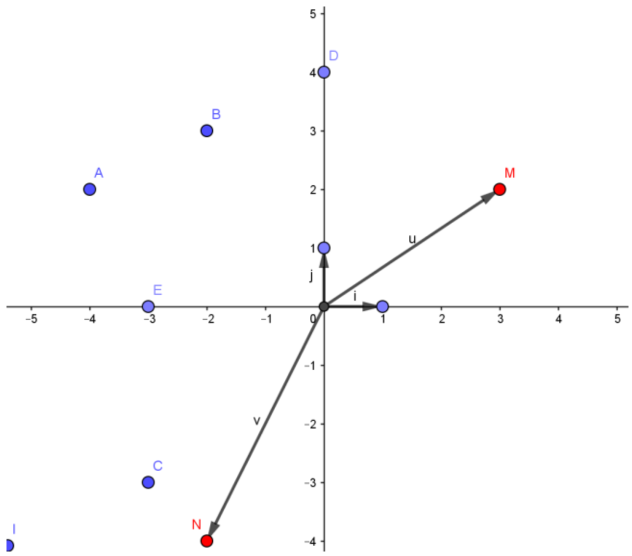
3) Les coordonnées d'un vecteur :

définition : Le plan est rapporté au Repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Le couple de coordonnée d'un vecteur $\vec{u}$ est le couple de coordonnée du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ et on note : $\vec{u}(x,y)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Application : Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ Construire les points $A(-4;2)$; $B(-2;3)$; $C(-3;3)$; $E(0;4)$; $F(-3;0)$ et les vecteurs $\vec{u}(3;2)$; $\vec{v}(-2;-4)$

Réponse : soit M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ donc $M(3;2)$ et soit N tel que $\overrightarrow{ON} = \vec{v}$ donc $N(-2;-4)$



Propriétés : Le plan est rapporté au

Repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

Soient $A\left(x_A;y_A\right)$; $B\left(x_B;y_B\right)$; $I\left(x_I;y_I\right)$ trois points dans le plan et $\vec{u}\left(x;y\right)$ et $\vec{v}\left(x';y'\right)$ deux vecteurs

$\overrightarrow{AB}\left(x_B-x_A;y_B-y_A\right)$ et $AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$

Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$

$\vec{u}\left(x;y\right)=\vec{v}\left(x';y'\right)$ ssi $x'=x$ et $y=y'$

$\vec{u}+\vec{v}\left(x+x';y+y'\right)$ et $\vec{u}-\vec{v}\left(x-x';y-y'\right)$

$\vec{u}+\vec{v}=\left(x+x'\right)\vec{i}+\left(y+y'\right)\vec{j}$

Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$ $\alpha\bullet\vec{u}\left(\alpha x;\alpha y\right)$

Application : Le plan est rapporté au Repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ et soient $A\left(1;2\right)$; $B\left(-5;4\right)$

1. Déterminer les coordonnée de I le milieu du segment [AB] et calculer $AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$
2. Déterminer les coordonnées du point C tel que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$
3. Quelle est la nature du quadrilatère $OACB$
4. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ tel que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{IC}$

Réponse :1) Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées $I\left(\frac{x_B+x_A}{2};\frac{y_B+y_A}{2}\right)$

Donc : $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ donc $I\left(\frac{1+\left(-5\right)}{2};\frac{2+4}{2}\right)$ donc $I\left(-2;3\right)$

$AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{\left(-5-1\right)^2+\left(4-2\right)^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

2) on a $A\left(1;2\right)$; $B\left(-5;4\right)$; $O\left(0;0\right)$ donc $\overrightarrow{OA}\left(x_A-x_O;y_A-y_O\right)$ donc $\overrightarrow{OA}\left(1-0;2-0\right)$ donc $\overrightarrow{OA}\left(1;2\right)$

$\overrightarrow{OB}\left(x_B-x_O;y_B-y_O\right)$ donc $\overrightarrow{OB}\left(-5-0;4-0\right)$ donc $\overrightarrow{OB}\left(-5;4\right)$

on a $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ donc $\overrightarrow{OC}\left(1+\left(-5\right);2+4\right)$ donc $\overrightarrow{OC}\left(-4;6\right)$ donc $C\left(-4;6\right)$

3) on a $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ donc $OACB$ est un parallélogramme

On vérifie : on a $\overrightarrow{OA}\left(1;2\right)$ ①

Et $\overrightarrow{BC}\left(-4+5;6-4\right)$ c a d $\overrightarrow{BC}\left(1;2\right)$ ②

De ① et ② on a donc $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}$ donc $OACB$ est un parallélogramme

4) on a $\vec{u}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{OA}\left(1;2\right)$ et $2\overrightarrow{OB}\left(-10;8\right)$

$\overrightarrow{IC}\left(-4+2;6-3\right)$ donc $\overrightarrow{IC}\left(-2;3\right)$

on a $\vec{u}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{IC}$ donc $\vec{u}\left(1-10+2;1+8+3\right)$ donc $\vec{u}\left(-11;13\right)$

II) Condition analytique de colinéarité de deux vecteurs

Dans la suite de ce cours le plan est rapporté au Repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

Soient $\vec{u}\left(x;y\right)$ et $\vec{v}\left(x';y'\right)$ deux vecteurs

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \alpha \bullet \vec{v}$

On a $\vec{u}\left(x;y\right)$ et $\alpha \bullet \vec{v}\left(\alpha x';\alpha y'\right)$

On a $\vec{u} = \alpha \bullet \vec{v}$ donc $x = \alpha x'$ et $y = \alpha y'$

Si $x' \neq 0$ et $y' \neq 0$ alors $\alpha = \dfrac{x}{x'}$ et $\alpha = \dfrac{y}{y'}$

donc $\dfrac{x}{x'} = \dfrac{y}{y'}$ alors $xy' = x'y$ finalement on a : $xy' - x'y = 0$

Si $x' = 0$ alors $x = 0$ la condition est juste

Si $y' = 0$ alors $y = 0$ la condition est juste

1) Le déterminant de deux vecteurs :

Définition : Soient $\vec{u}\left(x;y\right)$ et $\vec{v}\left(x';y'\right)$ deux vecteurs

On appelle le déterminant de deux vecteurs $\vec{u}\left(x;y\right)$ et $\vec{v}\left(x';y'\right)$ le réel : $xy' - x'y$

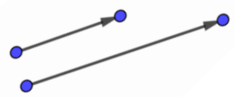
Et on le note : $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$

Exemple : $\vec{u}\left(-2;3\right)$ et $\vec{v}\left(4;5\right)$

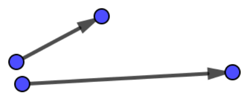
$\det\left(\vec{u};\vec{v}\right) = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \left(-2\right)\times 5 - 3\times 4 = -10 - 12 = -22$

2) Propriété :

Deux vecteurs $\vec{u}\left(x;y\right)$ et $\vec{v}\left(x';y'\right)$ sont colinéaires ssi $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right) = 0$



Deux vecteurs $\vec{u}\left(x;y\right)$ et $\vec{v}\left(x';y'\right)$ sont non colinéaires ssi



$\det\left(\vec{u};\vec{v}\right) \neq 0$

Remarque :

Trois points A. B et C sont alignés ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

Ssi $\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = 0$

Exemple : 1) $\vec{u}\left(1;2\right)$ et $\vec{v}\left(-3;1\right)$

$\det\left(\vec{u};\vec{v}\right) = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\times 1 - \left(-3\right)\times 2 = 1 + 6 = 7 \neq 0$ donc $\vec{u}\left(1;2\right)$ et $\vec{v}\left(-3;1\right)$ sont non colinéaires

2) $\vec{u}\left(-6;4\right)$ et $\vec{v}\left(3;-2\right)$

$\det\left(\vec{u};\vec{v}\right) = \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = \left(-6\right)\times\left(-2\right) - 3\times 4 = 12 - 12 = 0$ Donc $\vec{u}\left(-6;4\right)$ et $\vec{v}\left(3;-2\right)$ sont colinéaires

Application : Le plan est rapporté au Repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

Soit m un paramètre réel

Discuter suivant les valeurs de m la colinéarité de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans chaque cas :

1) $\vec{u}(3;2m+1)$ et $\vec{v}(2;m)$

2) $\vec{u}(m;1)$ et $\vec{v}(1;m)$

Réponse :1) on a : $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2m+1 & m \end{vmatrix}=3\times m-2(2m+1)=3m-4m-2=-m-2$

$\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=0$ ssi $-m-2=0$ ssi $m=-2$

Si $m=-2$ alors $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Si $m\neq-2$ alors $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)\neq0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires

2) on a : $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix}=m^2-1=m^2-1^2=(m+1)(m-1)$

$\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=0$ ssi $(m+1)(m-1)=0$ ssi $m=-1$ ou $m=-1$

Si $m=1$ alors $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Si $m=-1$ alors $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

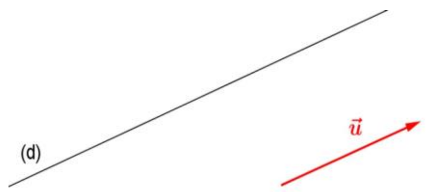
Si $m\neq1$ et $m\neq-1$ alors $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)\neq0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires

III)La droite dans le plan

1) Définition vectorielle d’une droite :

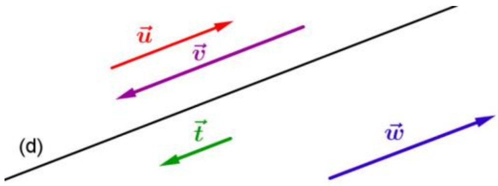
a. Vecteur directeur d'une droite :

Un vecteur directeur d'une droite (D) est un vecteur non nul $\vec{u}$ qui possède la même direction que la droite (D)



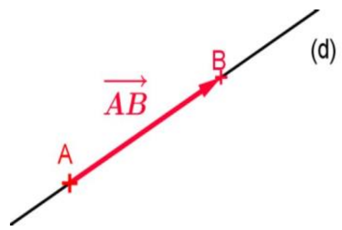
Remarques :

- Toute droite possède une infinité de vecteurs directeurs.

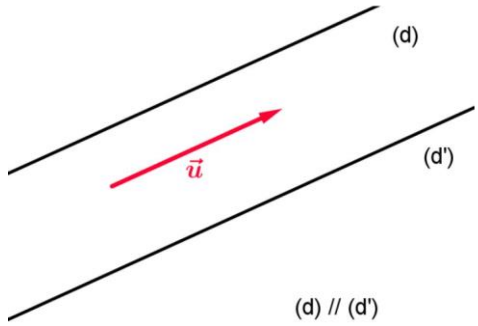


- si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (D) alors tout vecteur non nul et colinéaire au vecteur $\vec{u}$ est aussi vecteur directeur de cette droite.

- Deux points distincts quelconques de la droite (D) définissent un vecteur directeur de cette droite.



• Deux droites (D), et (D') sont parallèles si tout vecteur directeur de l'une est aussi vecteur directeur de l'autre.



b. Propriété :

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et A un point du plan

L'ensemble des points M du plan tq il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tq : $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u}$ est la droite (D) de vecteur directeur $\vec{u}$ et passant par A qu'on note : $D\left(A;\vec{u}\right)$

$$D\left(A;\vec{u}\right) = \left\{M \in P \,/\, \overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u}\right\} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

C'est la Définition vectorielle d'une droite

2) Représentation paramétrique d'une droite :

Soit $\vec{u}(a;b)$ un vecteur non nul et $A\left(x_A;y_A\right)$ un point du plan

On a $M \in D\left(A;\vec{u}\right)$ ssi il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tq : $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u}$

On a $\overrightarrow{AM}\left(x-x_A;y-y_A\right)$ et $\alpha\vec{u}\left(\alpha a;\alpha b\right)$ donc

$$\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} \text{ ssi } \begin{cases} x-x_A = \alpha a \\ y-y_A = \alpha b \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} x = \alpha a + x_A \\ y = \alpha b + y_A \end{cases} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

<u>Définition :</u> Soit $\vec{u}(a;b)$ un vecteur non nul et $A\left(x_A;y_A\right)$ un point du plan et $t \in \mathbb{R}$

le système : $\begin{cases} x = ta + x_A \\ y = tb + y_A \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ s'appelle une représentation paramétrique de la droite $D\left(A;\vec{u}\right)$

Exemples :

Exemple 1 : Donner un point et un vecteur directeur de la la droite D de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 7t-1 \\ y = -4t+11 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

<u>Réponse :</u> on a $A(-1;11) \in D$ et $\vec{u}(7;-4)$ est un vecteur directeur de la la droite D

Exemple 2 :

Soient A(1 ; 2) et B(-3 ; 0)

1) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).
2) Déterminer si chacun des points suivants appartient ou non a la droite (AB) :

$C(0;2)$; $D(-1;1)$; $E(9;6)$

Réponse :1) $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (AB), ses composantes sont : $\overrightarrow{AB}$ (-4, -2)

La représentation paramétrique de (AB) est donnée par le système :

$$① \begin{cases} x = -4t + 1 \\ y = -2t + 2 \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

2)on a $C(0;2)$ on remplace les coordonnées de C dans le système ①

Donc $\begin{cases} 0 = -4t + 1 \\ 2 = -2t + 2 \end{cases}$ on trouve $\begin{cases} t = \frac{1}{4} \\ t = 0 \end{cases}$ or $\frac{1}{4} \neq 0$ don $C \notin (AB)$

on a $D(-1;1)$ on remplace les coordonnées de D dans le système ①

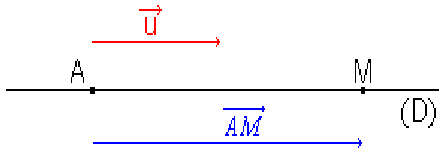
Donc $\begin{cases} -1 = -4t + 1 \\ 1 = -2t + 2 \end{cases}$ on trouve $\begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$ don $D \in (AB)$

on a $E(9;6)$ on remplace les coordonnées de E dans le système ①

Donc $\begin{cases} 9 = -4t + 1 \\ 6 = -2t + 2 \end{cases}$ on trouve $\begin{cases} t = -2 \\ t = -2 \end{cases}$ donc $E \in (AB)$

3) Equations cartésiennes d'une droite

Soit $\vec{u}(\alpha;\beta)$ un vecteur non nul et $A(x_A;y_A)$ un point du plan et soit $(D) = D(A;\vec{u})$



On a $M(x;y) \in (D)$ ssi $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

ssi $\det(\overrightarrow{AM};\vec{u}) = 0$ On a $\overrightarrow{AM}(x - x_A; y - y_A)$

et on a $\begin{vmatrix} x - x_A & \alpha \\ y - y_A & \beta \end{vmatrix} = \beta(x - x_A) - \alpha(y - y_A) = \beta x - \beta x_A - \alpha y + \alpha y_A = \beta x - \alpha y - \beta x_A + \alpha y_A$

on pose : $\beta = a$ et $-\alpha = b$ et $-\beta x_A + \alpha y_A = c$ alors :

$M(x;y) \in (D)$ ssi $ax + by + c = 0$

Définition :

Toute droite (D) admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$ ou $b \neq 0$

Remarque : Une droite (D) admet une infinité d'équations cartésiennes

En effet, si ax + by + c = 0 est une équation cartésienne de (D), alors pour tout réel ***k*** non nul alors kax + kby + kc **= *0*** est une autre équation de la même droite.

Propriété : Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$ tel que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$

L'ensemble des points M (x ; y) vérifiant l'équation : **ax + by + c =** 0 est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b;a)$

Exemples :

Exemple 1 : Déterminer une équation cartésienne de la droite D) passant par le point A(1 ; -1) et de vecteur directeur $\vec{u}(-1;3)$

Réponse : Soit M un point de d de coordonnées : M (x ; y)

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}(x-1; y+1)$ et $\vec{u}(-1;3)$ sont colinéaires si, et seulement si $\det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u}\right)=0$

équivaut à : (x - 1)(**3**) - (y + 1)(**-1**) = 0 équivaut à :3 x — 3+y + l = 0 équivaut à : 3 x + y —2 = 0
Une équation cartésienne de la droite (D), est : 3 x + y —2 = 0

<u>Exemple 2 :</u> Déterminer une équation cartésienne de la droite (D), passant par les points A (5 ; 13) et B (10; 23).

Réponse : Les points A et B appartiennent à la droite (D), donc le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de cette droite.

On a $\overrightarrow{AB}(10-5; 23-13)$ donc $\overrightarrow{AB}(5;10)$ en divisant les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par 5, nous obtenons le vecteur $\vec{u}(1;2)$ est vecteur directeur aussi de la droite (D),

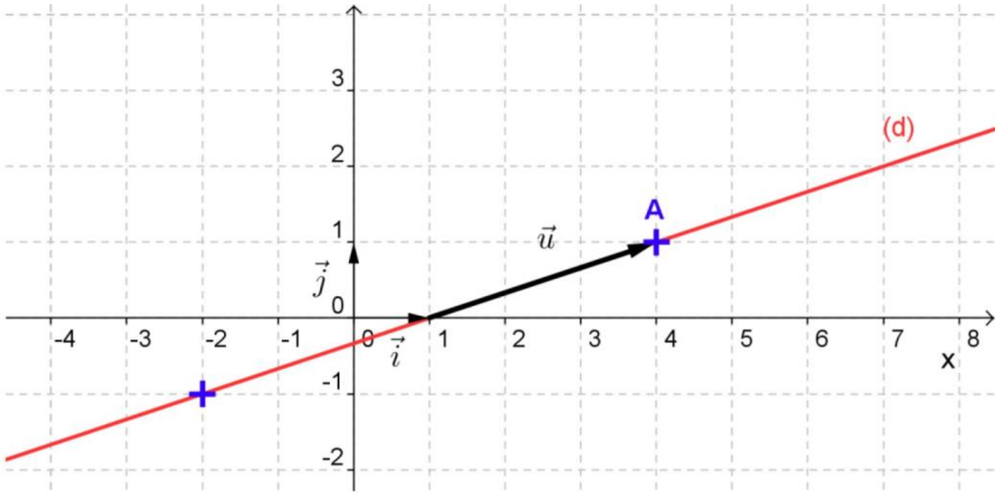
Donc b = 1 et a = -2 Une équation cartésienne de la droite d est donc

de la forme : — 2 x + y + c = 0 Comme le point A (**5** ; **13**) appartient à la droite (D), ses coordonnées vérifient l'équation : —2x5 + 1 3 + c = 0 donc — 10+ 13 + c = 0 D'où : c = — 3

Une équation cartésienne de la droite (D), est donc : **— 2 x + y — 3 = 0**

<u>Exemple 3 :</u> Déterminer l'équation cartésienne d'une droite à partir de sa représentation graphique

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan. Déterminer une équation cartésienne de la droite (D), , tracée ci-dessous



Réponse :

Méthode 1 : Le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (D),
On lit graphiquement $\vec{u}(3;1)$ Donc a = -1 et b = 3
Une équation cartésienne de la droite d est de la forme :
- x + 3y + c = 0 Comme le point A (4 ; 1) appartient à la droite (D), ses coordonnées vérifient l'équation :—4 + 3 + ***c*** = 0 ***c*** = l

Une équation cartésienne de la droite d est : **- x + 3 y + 1 = 0**
Méthode 2 : On prend deux points de la droite, par exemple : A (4 ; 1) et B (-2 ; -1) et on applique la même méthode qu'à l'exemple 2.

4) Equation réduite d'une droite

Soit (D) une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ donc $by=-ax-c$

Si $b\neq 0$ alors $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

On pose : $m=-\frac{a}{b}$ et $p=-\frac{c}{b}$ alors $y=mx+p$

Si $b=0$ alors on a $ax+c=0$ donc $x=-\frac{c}{a}$ $(a\neq 0)$ dans ce cas (D) est parallèle à l'axe des ordonnées

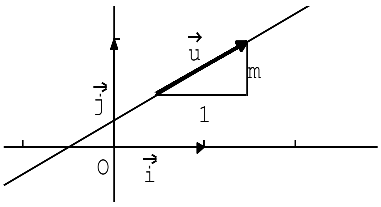
Propriété : une droite n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées ssi son équation cartésienne s'écrit sous la forme : **y = mx + p** ***avec*** $m\in\mathbb{R}$ ***et*** $p\in\mathbb{R}$

Définition : Soit (D) une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.
L'équation: y = mx + p *s'appelle* L'équation réduite de (D)

- le nombre *m s'appelle* le coefficient directeur de la droite
- le nombre *p s'appelle* l' ordonnée a l'origine

Remarque :

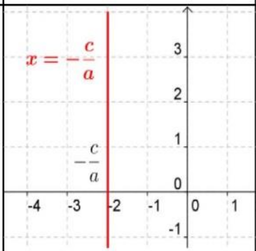
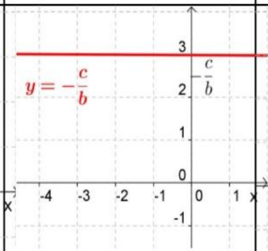
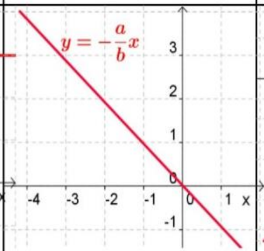
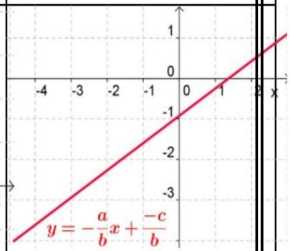
- si *m est* le coefficient directeur de la droite alors un vecteur directeur de cette droite est $\vec{u}(1;m)$
- si $\vec{u}(-b;a)$ *est* un vecteur directeur de la droite (D) et $b\neq 0$ alors $m=-\frac{a}{b}$ est un coefficient directeur de la droite



Exemple: Soit (D) la droite d'équation cartésienne: *4x + 2 y + 3 = 0*

- Son équation réduite est de la forme: y = -2x-3
- *-2 est* le coefficient directeur de la droite (D)
- Un vecteur directeur de cette droite est $\vec{u}(-2;4)$ ou $\vec{u}(1;-2)$

Récapitulatif : Equations cartésiennes et équations réduites

	Cas où $b=0$ et $a\neq 0$	Cas où $a=0$ et $b\neq 0$	Cas où $c=0$ et $a\neq 0$ et $b\neq 0$	Cas où $c\neq 0$ et $a\neq 0$ et $b\neq 0$
Equation cartésienne	$ax+0+c=0$ $ax+c=0$	$0+by+c=0$ $by+c=0$	$ax+by+0=0$ $ax+by=0$	$ax+by+c=0$
Equation réduite	$x=-\dfrac{c}{a}$	$y=-\dfrac{c}{b}$	$y=-\dfrac{a}{b}x$	$y=-\dfrac{a}{b}x+-\dfrac{c}{b}$
Représentation graphique				

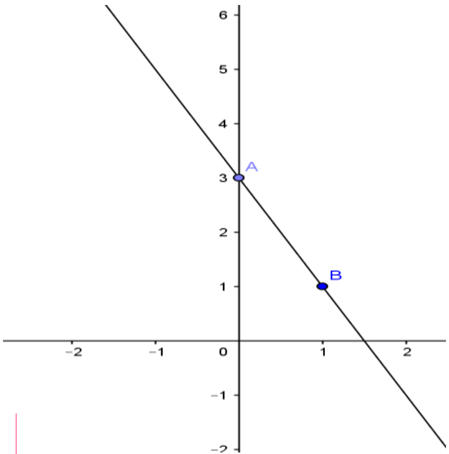
Remarque : si $A(x_A;y_A)$ **;** $B(x_B;y_B)$ et $x_A\neq x_B$ alors $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ est coefficient directeur de la droite (AB)

<u>Exemple:</u> Représenter graphiquemt les droites suivantes :

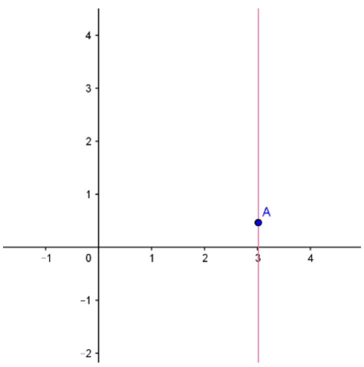
1) (D_1) $2x+\ y-3=0$ 2) (D_2) : $x\ =3$ 3) (D_2) : $y\ =2$

Réponse :1)

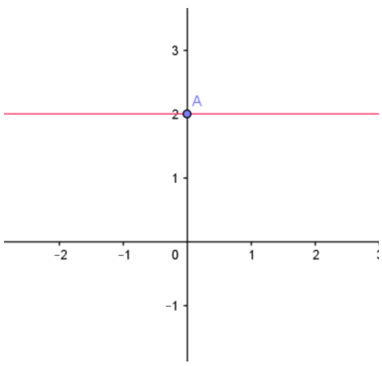
x	0	1
y	3	1



2)



3)



IV)positions relatives de deux droites dans le plan

Propriété :
Deux droites (D) et (D'), d'équations respectives *ax + by + c* = 0 et *a'x + b 'y + c '* = 0 sont parallèles si et seulement si : *a b ' - a'b* = 0

Démonstration :

$\vec{u}(-b;a)$ est un vecteur directeur de la la droite(D)

$\vec{u'}(-b';a')$ est un vecteur directeur de la la droite(D'),

(D) et (D') sont parallèles équivaut à $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires ce qui équivaut à :

- *b a'* - *a* (- *b')* = 0 ce qui équivaut à : *a b'* - *a'b* = 0.

Remarque: 1) si (D) et (D') sont parallèles : on prend un point $A\in(D)$

- Si $A\in(D')$ alors $(D)=(D')$ (confondues)
- Si $A\notin(D')$ alors $(D)\parallel(D')$ strictement

2) si (D) et (D') sont sécantes alors le point d'intersection E (x ; y) vérifie le systéme :

$$\begin{cases} ax+by+c = 0 \\ a'x+b'y+c' = 0 \end{cases}$$

Conséquence : Soit la droite (D) d'équation : ***y = mx + p*** et (D') : ***y' = m'x + p'***
(D) et (D') sont parallèles si et seulement si ***m = m'***
En effet les vecteurs de coordonnées (1 ; ***m)*** et (1 ;***m)*** sont deux vecteurs directeurs respectifs de (D) et (D')
D'où : ces vecteurs sont colinéaires si et seulement si ***m = m'***

Application :
Étudier la position relative des deux droites D) et (D') dans chaque cas suivant :

1) (D) ***2x – 4 y + 3 = 0*** (D') **:** ***-x +2 y + 5 = 0***

2) (D) ***2x + 5 y -2 = 0*** (D') **:** ***x +3 y -2 = 0***

Réponse :1) on a : (D) ***2x – 4 y + 3 = 0*** donc $\vec{u}(4;2)$ est un vecteur directeur de (D)

Et on a : (D') **:** ***-x +2 y + 5 = 0*** donc $\vec{v}(-2;-1)$ est un vecteur directeur de (D')

$\det(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix}4 & -2\\2 & -1\end{vmatrix}=-4+4=0$ Alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc (D) et (D') sont parallèles

Soit $A(x;y)\in(D)$ on prend $x=0$ Alors ***0 – 4 y + 3 = 0*** donc $y=\frac{3}{4}$ donc $A\left(0;\frac{3}{4}\right)\in(D)$

On vérifie si $A\left(0;\frac{3}{4}\right)\in(D')$?

on a : $-0+2\times\frac{3}{4}+5=\frac{3}{2}+5=\frac{13}{2}\neq0$ donc $A\left(0;\frac{3}{4}\right)\notin(D')$ D'où : $(D)\parallel(D')$ strictement

2) on a : (D) ***2x + 5 y -2 = 0*** donc $\vec{u}(-5;2)$ est un vecteur directeur de (D)

Et on a : (D') **:** ***x +3 y -2 = 0***donc $\vec{v}(-3;1)$ est un vecteur directeur de (D')

$\det(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix}-5 & -3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-5+6=1\neq 0$ Alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires donc (D) et (D') sont sécantes

On détermine le point d'intersection de (D) et (D')

Soit $E(x;y)$ ce point d'intersection de (D) et (D') Alors $(x;y)$ vérifie le système :

$\begin{cases}2x+5y-2=0\\ x+3y-2=0\end{cases}$ donc $\begin{cases}2x+5y=2\\ x+3y=2\end{cases}$ donc $\begin{cases}2x+5y=2\\ x=2-3y\end{cases}$

donc $\begin{cases}2(2-3y)+5y=2\\ x=2-3y\end{cases}$ donc $\begin{cases}4-6y+5y=2\\ x=2-3y\end{cases}$ donc $\begin{cases}4-y=2\\ x=2-3y\end{cases}$

donc $\begin{cases}y=2\\ x=2-3y\end{cases}$ donc $\begin{cases}y=2\\ x=-4\end{cases}$ donc $E(-4;2)$