Géométrie dans l'espace

EL KYAL MOHAMED

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

➢ Expressions analytiques :

Soient $\vec{u}(a,b,c)$ et $\vec{v}(a',b',c')$ deux vecteurs

- **Produit scalaire :** $\vec{u}.\vec{v} = aa' + bb' + cc'$
- **Norme :** $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$
- **Produit vectoriel :** $\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}\vec{k}$

➢ Aire d'un triangle :

L'aire d'un triangle ABC est: $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$

➢ Distances :

La distance entre deux points A et B est :

$$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

La distance du point M au plan (P) d'équation $ax+by+cz+d=0$ est:

$$d(M;(P)) = \frac{|ax_M+by_M+cz_M+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

La distance du point M à la droite $\Delta(A,\vec{u})$ est: $d(M,(\Delta)) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$

➢ Equation cartésienne d'un plan :

$\vec{n}(a,b,c)$ est un vecteur normal au plan $(P) \Leftrightarrow (P): ax+by+cz+d=0$

Si $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ alors les points A, B et C ne sont pas alignés

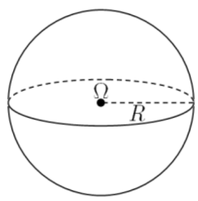
Dans ce cas : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC) et l'équation cartésienne du plan (ABC) peut être déterminé à l'aide de l'équivalence suivante :

$$M\in(ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}) = 0$$

➢ Equation cartésienne d'une sphère:

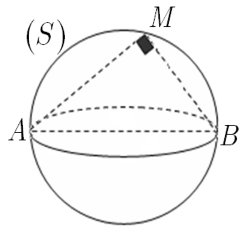
L'équation cartésienne d'une sphère de centre $\Omega(a,b,c)$ et de rayon R est :

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$$



➢ Ensemble des points M de l'espace vérifiant : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$

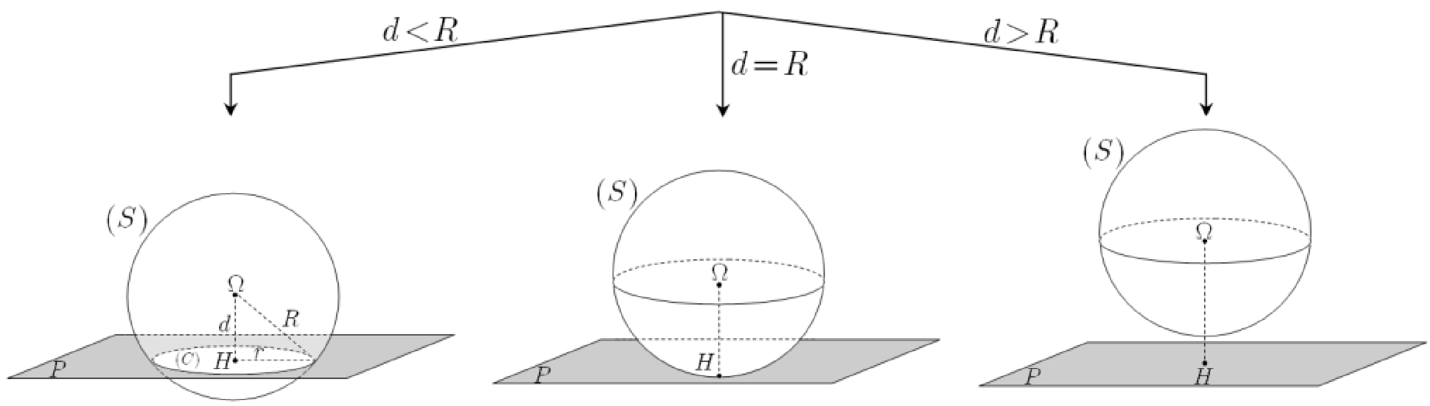
L'ensemble des points de l'espace vérifiant :
$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$ est la sphère de diamètre $[AB]$



➢ Intersection d'une sphère et d'un plan :

Soit la sphère (S) de centre Ω et de rayon R et le plan P

Soit H le projeté orthogonal du centre Ω sur le plan P . On pose : $d=\Omega H=d\ \Omega;\ \mathrm{P}$



P coupe S selon un cercle C de centre H et de rayon : $r=\sqrt{R^2-d^2}$

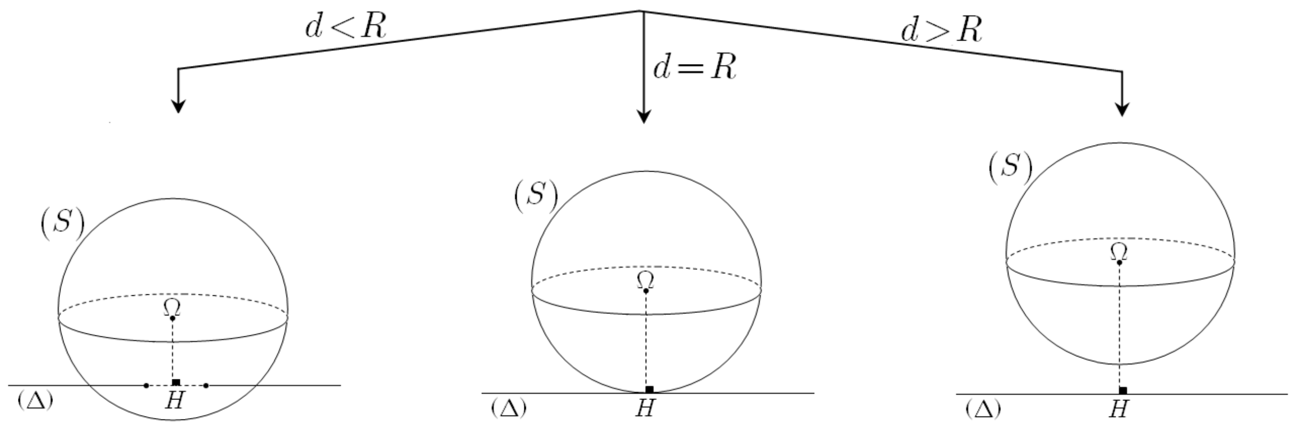
P est tangent à S en H

P ne coupe pas S

➢ Intersection d'une sphère et d'une droite :

Soit la sphère (S) de centre Ω et de rayon R et la droite Δ .

Soit H le projeté orthogonal du centre Ω sur la droite Δ . On pose : $d=\Omega H=d\ \Omega;\ \Delta$



Δ coupe S en deux points distincts

Δ est tangente à S en H

Δ ne coupe pas S