Exercices corrigés
Géométrie Espace

1. 1. Fesic 2002, exo 13 (c)

Soit (ABC) un triangle équilatéral de côté 3 ; G le centre de gravité de (ABC) ; H le symétrique de A par rapport à G. On pourra également considérer I le milieu du segment $[BC]$.

a. Le point H est le barycentre du système de points pondérés : $\{(A, 1) ; (B, -2) ; (C, -2)\}$.

b. On a : $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HC}=3$.

Soit (P) le plan passant par A et perpendiculaire à la droite (HC).

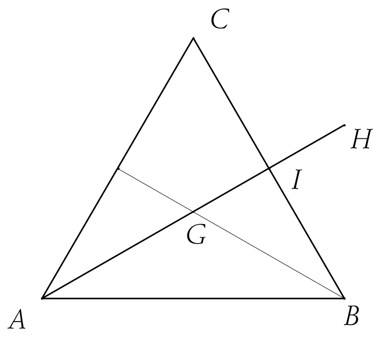
c. Pour tout point M de (P), on a : $\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{HC}=3$.

d. Le plan (P) est l'ensemble des points M de l'espace vérifiant :

$(\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}).\overrightarrow{HC}=-9$

Correction

Faisons la figure :



a. **Vrai :** Le barycentre K de $\{(A, 1) ; (B, -2) ; (C, -2)\}$ est celui de $\{(A, 1) ; (I, -4)\}$ donc tel que

$$\overrightarrow{AK}=\frac{-4}{1-4}\overrightarrow{AI}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AH}.$$

b. **Vrai :** Comme on a un triangle équilatéral, (AH) est orthogonal à (BC) donc le projeté de C sur AH est I :

$$\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HI}=\frac{4}{3}AI.\frac{1}{3}AI=\frac{4}{9}\left(3\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=3.$$

On pouvait aussi utiliser la trigo :

$\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HC}=HA.HC\cos(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{HC})=\frac{4}{3}\left(3\frac{\sqrt{3}}{2}\right).\frac{2}{3}\left(3\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos\frac{\pi}{3}=3$ (je ne détaille pas, je vous conseille de chercher les différents éléments…).

c. **Vrai :** Soit M un point de (P), on a : $\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{HC}=3+0=3$ puisque (AM) est orthogonal à (HC).

d. **Faux** : Simplifions : $(\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}).\overrightarrow{HC}=-3\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{HC}=3\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{HC}=9$.

1. 2. QCM, Am. du Nord 2007 (c)

3 points

Pour chacune des trois propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$.

Soit (P) le plan dont une équation est : $2x+y-3z+1=0$. Soit A le point de coordonnées $(1\,;11\,;7)$.

Proposition 1 : « Le point H, projeté orthogonal de A sur (P) a pour coordonnées $(0\,;2\,;1)$. »

2. On considère l'équation différentielle (E) : $y'=2-2y$.

On appelle u la solution de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $u(0)=0$.

Proposition 2 : « On a $u\left(\frac{\ln 2}{2}\right)=\frac{1}{2}$. »

3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0=2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\sqrt{7u_n}$.

Proposition 3 : « Pour tout entier naturel n, on a $0\leq u_n\leq 7$. »

Correction

Proposition 1 : « Le point H, projeté orthogonal de A sur (P) a pour coordonnées $(0\,;2\,;1)$. »

Calculons $\overrightarrow{AH}=(-1\,;-9\,;-6)$ et le vecteur normal à (P) : $\vec{n}=(2\,;1\,;-3)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc c'est **faux**.

Nota : on peut chercher les coordonnées de H : comme H est le projeté orthogonal de A sur (P), alors $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires. Il existe donc un réel k tel que $\overrightarrow{AH}=k\,\vec{n}$, c'est-à-dire $\begin{cases} x_H-1=2k \\ y_H-11=k \\ z_H-7=-3k \end{cases}$ ou encore

$\begin{cases} x_H=1+2k \\ y_H=11+k \\ z_H=7-3k \end{cases}$ (1). De plus, H appartient à (P), alors : $2(1+2k)+(11+k)-3(7-3k)+1=0$, $14k-7=0$.

On en déduit que $k=\frac{1}{2}$. En remplaçant dans (1), on obtient $\left(2\,;\frac{23}{2}\,;\frac{11}{2}\right)$.

2. (E) : $y'=2-2y$.

Proposition 2 : « On a $u\left(\frac{\ln 2}{2}\right)=\frac{1}{2}$. »

Les solutions de (E) sont $u(x)=Ce^{-2x}-\frac{2}{-2}=Ce^{-2x}+1$; avec $u(0)=0$ on a $C=-1$ et $u\left(\frac{\ln 2}{2}\right)=1-e^{-2\frac{\ln 2}{2}}=1-\frac{1}{e^{\ln 2}}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ donc **vrai**.

3. $u_0=2$; $u_{n+1}=\sqrt{7u_n}$.

Proposition 3 : « Pour tout entier naturel n, on a $0\leq u_n\leq 7$. »

$u_n\geq 0$ est évident ; par récurrence : $u_0=2\leq 7$ et $u_n\leq 7\Leftrightarrow 7u_n\leq 49\Rightarrow\sqrt{7u_n}\leq\sqrt{49}=7$ donc **vrai**.

1. 3. QCM espace, Polynésie 2005 (c)

5 points

Pour chacune des cinq questions, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une *réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève 0,5 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.*

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$.

On considère les points $A(3\,;\,1\,;\,3)$ et $B(-6\,;\,2\,;\,1)$.

Le plan P admet pour équation cartésienne $x+2y+2z=5$.

1. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\|4\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|=2$ est :

a. un plan de l'espace ; b. une sphère ; c. l'ensemble vide.

2. Les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan P sont :

a. $\left(\dfrac{11}{3}\,;\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{1}{3}\right)$ b. $\left(\dfrac{8}{3}\,;\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{7}{3}\right)$ c. $\left(\dfrac{7}{3}\,;-\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{5}{3}\right)$.

3. La sphère de centre B et de rayon 1 :

a. coupe le plan P suivant un cercle ; b. est tangente au plan P ; c. ne coupe pas le plan P.

4. On considère la droite D de l'espace passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(1\,;2\,;-1)$ et la droite D' d'équations paramétriques $\begin{cases} x=3+2t \\ y=3+t \\ z=t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$. Les droites D et D' sont :

a. coplanaires et parallèles ; b. coplanaires et sécantes ; c. non coplanaires.

5. L'ensemble des points M de l'espace équidistants des points A et B est :

a. la droite d'équations paramétriques $\begin{cases} x=-\dfrac{3}{2}-t \\ y=\dfrac{3}{2}-7t \\ z=2+t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$,

b. le plan d'équation cartésienne $9x-y+2z+11=0$,

c. le plan d'équation cartésienne $x+7y-z-7=0$.

Correction

1. $\left\|4\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|=2 \Leftrightarrow \left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=2 \Leftrightarrow MG=\dfrac{2}{3}$ où G est le barycentre de $\{(A,4)\,;(B,-1)\}$. Il s'agit d'une sphère de centre G de rayon 2/3. Réponse **b**.

2. Il faut que $\overrightarrow{AH}$ soit colinéaire au vecteur normal de P, soit $\vec{n}(1\,;2\,;2)$, on a donc en posant x, y et z les coordonnées de H : $\overrightarrow{AH}=k\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=k \\ y-1=2k \\ z-3=2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3+k \\ y=1+2k \\ z=3+2k \end{cases}$.

De plus H doit être sur P, on a alors $3+k+2(1+2k)+2(3+2k)=5 \Leftrightarrow 9k+11=5 \Leftrightarrow k=-6/9=-2/3$ d'où en remplaçant, $\begin{cases} x=3-2/3=7/3 \\ y=1-4/3=-1/3 \\ z=3-4/3=5/3 \end{cases}$. Réponse **c**.

3. Il nous faut d'abord calculer la distance de B à P : $d(B,P)=\dfrac{|-6+2.2+2.1-5|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\dfrac{5}{3}$; cette distance est supérieure à 1 donc la sphère de centre B de rayon 1 ne coupe pas P. Réponse **c**.

4. Ecrivons les équations paramétriques de D : $\begin{cases} x = 3+t' \\ y = 1+2t',\ t' \in \mathbb{R} \\ z = 3-t' \end{cases}$; le vecteur directeur de D' est $\vec{v}\left(2\,;1\,;1\right)$ qui n'est pas colinéaire à $\vec{u}$, elles ne sont pas parallèles.

On fait l'intersection : $\begin{cases} x = 3+t' = 3+2t \\ y = 1+2t' = 3+t \\ z = 3-t' = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3+t' = 3+6-2t' \Rightarrow 3t' = 6 \\ 1+2t' = 3+3-t' \Rightarrow 3t' = 5 \\ 3-t' = t \end{cases}$.

C'est impossible donc encore réponse **c**.

5. L'ensemble des points M de l'espace équidistants des points A et B est le plan médiateur de $[AB]$. Le milieu de [AB] a pour coordonnées $\left(-3/2\,;3/2\,;2\right)$; ces coordonnées marchent dans les deux équations de plan, il faut donc regarder le vecteur $\overrightarrow{AB}$ qui doit être colinéaire au vecteur normal d'un des plans : $\overrightarrow{AB} = \left(-9\,;1\,;-2\right)$ qui est colinéaire à $(9\,;-1\,;2)$. Réponse **b**.

1. 4. QCM, France 2006 (c)

5 points

Soit $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace. On considère les points $A(2\ ;\ 4\ ;\ 1)$, $B(0\ ;\ 4\ ;\ -3)$, $C(3\ ;\ 1\ ;\ -3)$, $D(1\ ;\ 0\ ;\ -2)$, $E(3\ ;\ 2\ ;\ -1)$, $I\left(\frac{3}{5}\,;4\,;-\frac{9}{5}\right)$.

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, dire, sans le justifier, si elle est vraie ou si elle est fausse. Pour chaque question, il est compté un point si la réponse est exacte et zéro sinon.

1. Une équation du plan (ABC) est : $2x + 2y - z - 11 = 0$.
2. Le point E est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).
3. Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
4. La droite (CD) est donnée par la représentation paramétrique suivante : $\begin{cases} x = -1+2t \\ y = -1+t \quad \left(t \in \mathbb{R}\right) \\ z = 1-t \end{cases}$.
5. Le point I est sur la droite (AB).

Correction

1. **Vrai** : on vérifie que A, B et C sont dans le plan (en supposant qu'ils ne sont pas alignés…).

2. **Faux** : E est bien dans le plan mais $\overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \neq k\vec{n}$ où $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est le vecteur normal au plan.

3. **Vrai** : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4-4 = 0$.

4. **Faux** : ok pour le vecteur, par contre C n'est pas sur la droite : $\begin{cases} 3 = -1+2t \\ 1 = -1+t \\ -3 = 1-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = t \\ 2 = t \\ 4 = t \end{cases}$.

5. **Vrai** : $\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3/5-2 \\ 4-4 \\ -9/5-1 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -7/5 = -2k \\ 0 = 0 \\ -14/5 = -4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 7/10 \\ 0 = 0 \\ k = 7/10 \end{cases}$.

1. 5. Vrai-Faux justifié, Polynésie 2006 (c)

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne les points $A(0\,;0\,;2)$ $B(0\,;4\,;0)$ et $C(2\,;0\,;0)$.

On désigne par I le milieu du segment $[BC]$, par G l'isobarycentre des points A, B et C, et par H le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

Proposition 1 : « l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=0$ est le plan (AIO) ».

Proposition 2 : « l'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$ est la sphère de diamètre $[BC]$ ».

Proposition 3 : « le volume du tétraèdre $OABC$ est égal à 4 ».

Proposition 4 : « le plan (ABC) a pour équation cartésienne $2x+y+2z=4$ et le point H a pour coordonnées $\left(\frac{8}{9};\frac{4}{9};\frac{8}{9}\right)$. »

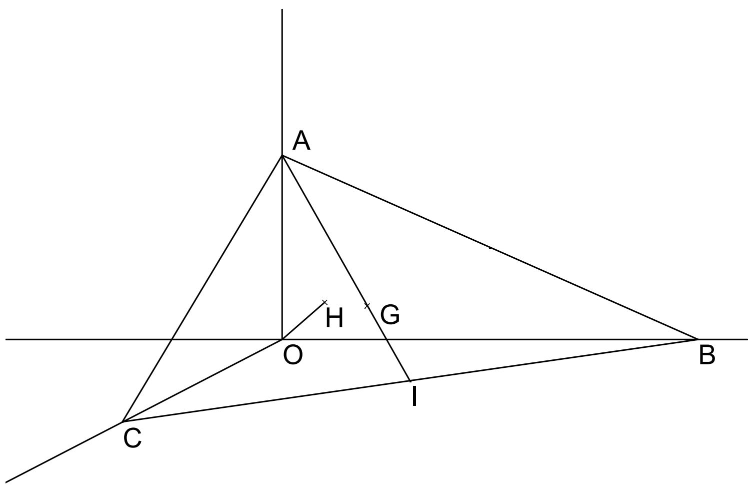
Proposition 5 : « la droite (AG) admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=2-2t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$. »

<u>Correction</u>

Proposition 1 : Faux. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=0$: avec les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow 2x-4y=0$; on vérifie aisément que A et $O(0\,;0\,;0)$ sont dans ce plan mais pas $I(1\,;2\,;0)$.

Proposition 2 : Vrai.

On réduit facilement $\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\| \Leftrightarrow \left\|2\overrightarrow{MI}\right\|=\left\|\overrightarrow{CB}\right\| \Leftrightarrow IM=\frac{1}{2}BC=\sqrt{5}$. Sphère de centre I, de rayon $\frac{1}{2}BC$ = sphère de diamètre $[BC]$.



Proposition 3 : Faux. Une base est BOC, d'aire $\frac{1}{2}\times4\times2=4$; une hauteur est $OA=2$; le volume est $\frac{1}{3}\times2\times4=\frac{8}{3}$.

Proposition 4 : Vrai. On vérifie que les coordonnées des trois points sont ok. $2\times0+0+2\times2=4$, etc.

Si le point H a pour coordonnées $\left(\frac{8}{9};\frac{4}{9};\frac{8}{9}\right)$, le vecteur $\overrightarrow{OH}$ est colinéaire au vecteur normal à (ABC), soit $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$. C'est le cas… On vérifie enfin que H est dans (ABC) : $2\frac{8}{9}+\frac{4}{9}+2\frac{8}{9}=\frac{36}{9}=4$, ok.

Proposition 5 : **Vrai**. Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AI}=\begin{pmatrix}1-0\\2-0\\0-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ qui est bien un vecteur directeur de $\begin{cases}x=t\\y=2t\\z=2-2t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$; par ailleurs A est sur cette droite.

<u>1. 6. QCM espace France 2004 (c)</u>

Pour chaque question une seule réponse est exacte. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse inexacte enlève 1/2 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif la note est ramenée à 0.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne le point $S(1 ; -2 ; 0)$ et le plan P d'équation $x+y-3z+4=0$.

1. Une représentation paramétrique de la droite D passant par le point S et perpendiculaire au plan P est :

A : $\begin{cases}x=1+t\\y=1-2t\\z=-3\end{cases}$ B : $\begin{cases}x=2+t\\y=-1+t\\z=1-3t\end{cases}$ C : $\begin{cases}x=1+t\\y=-2-2t\\z=3t\end{cases}$ D : $\begin{cases}x=2+t\\y=-1+t\\z=-3-3t\end{cases}$ (t réel).

2. Les coordonnées du point d'intersection H de la droite D avec le plan P sont :

A : $(-4 ; 0 ; 0)$ B : $\left(\frac{6}{5};\frac{-9}{5};\frac{-3}{5}\right)$ C : $\left(\frac{7}{9};\frac{-2}{3};\frac{1}{3}\right)$ D : $\left(\frac{8}{11};\frac{-25}{11};\frac{9}{11}\right)$

3. La distance du point S au plan P est égale à :

A : $\frac{\sqrt{11}}{3}$ B : $\frac{3}{\sqrt{11}}$ C : $\frac{9}{\sqrt{11}}$ D : $\frac{9}{11}$

4. On considère la sphère de centre S et de rayon 3. L'intersection de la sphère S et du plan P est égale :

A : au point $I(1 ; -5 ; 0)$ B : au cercle de centre H et de rayon $r=3\sqrt{\frac{10}{11}}$

C : au cercle de centre S et de rayon 2 D : au cercle de centre H et de rayon $r=\frac{3\sqrt{10}}{11}$

<u>**Correction**</u>

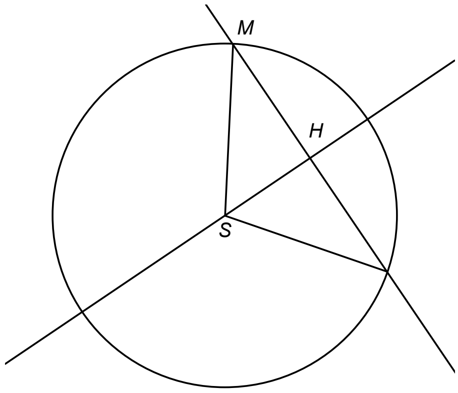
1. Réponse D : on écrit classiquement la relation $\overrightarrow{SM}=t\vec{n}$ où $\vec{n}$ est le vecteur normal à P : $\begin{pmatrix}x-1\\y+2\\z-0\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$, ce qui donne $\begin{cases}x=1+t\\y=-2+t\\z=-3t\end{cases}$ qui ne correspond à rien de ce qui est proposé. En examinant les diverses solutions proposées on voit que A et C ne peuvent convenir, le vecteur n'étant pas le bon. Il reste à vérifier S dans les autres : si on fait $x = 1$, $y = -2$, $z = 0$ dans B on obtient $t = -1$, $t = -1$, $t = 1/3$ ce qui n'est pas correct, par contre dans D on a $t = -1$ dans les trois cas.

2. Réponse D : avec les équations paramétriques obtenues on remplace dans l'équation de P : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -2+t \\ z = -3t \end{cases}$

donne $(1+t)+(-2+t)-3(-3t)+4=0 \Leftrightarrow 11t=-3 \Leftrightarrow t=-\dfrac{3}{11}$ d'où les coordonnées du point d'intersection H :

$$\begin{cases} x = 1-3/11 = 8/11 \\ y = -2-3/11 = -25/11 \\ z = -3.3/11 = -9/11 \end{cases}.$$

3. Réponse B : soit on calcule



$$AH = \sqrt{\left(1-\frac{8}{11}\right)^2+\left(-2+\frac{25}{11}\right)^2+\left(0+\frac{9}{11}\right)^2} = \frac{\sqrt{9+9+81}}{11} = \frac{3}{\sqrt{11}},$$

soit on applique la formule de la distance d'un point à un plan :

$$d(S,P) = \frac{|1.1+1.(-2)-3.0+4|}{\sqrt{1^2+1^2+(-3)^2}} = \frac{3}{\sqrt{11}}.$$

4. Réponse B : On a $3/\sqrt{11} < 3$ donc H est à l'intérieur de la sphère et P coupe la sphère suivant un cercle (passant par M sur la figure). Le rayon du cercle est MH que l'on calcule avec Pythagore : .

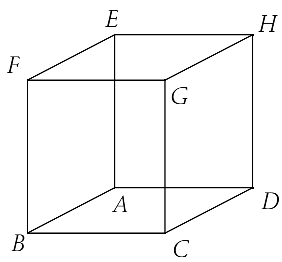
$$SH^2+HM^2=SM^2 \Leftrightarrow HM^2 = 3^2-\left(\frac{3}{\sqrt{11}}\right)^2 = 9-\frac{9}{11} = \frac{90}{11} \Rightarrow HM = \frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{11}}.$$

1. 7. QCM espace, N. Calédonie 2004 (c)

5 points

Cet exercice est un Q.C.M. Pour chacune des cinq questions une ou plusieurs réponses sont exactes. Le candidat doit inscrire V (vrai) ou F (faux) dans la case correspondante. Aucune justification n'est demandée.

Pour chaque question 3 réponses correctes rapportent 1 point, 2 réponses correctes rapportent 0,5 point.



Soit $ABCDEFGH$ un cube de côté 1. On choisit le repère orthonormal $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$. On appelle I et J les milieux respectifs des segments $[EF]$ et $[FG]$. L est le barycentre de $\{(A\,;1),\,(B\,;3)\}$. Soit (P) le plan d'équation $4x-4y+3z-3=0$.

1. Les coordonnées de L sont :

Propositions	a. $\left(\frac{1}{3};0;0\right)$	b. $\left(\frac{3}{4};0;0\right)$	c. $\left(\frac{2}{3};0;0\right)$
Réponses			

2. Le plan (P) est le plan :

Propositions	a. (GLE)	b. (LEJ)	c. (GFA)
Réponses			

3. Le plan parallèle au plan (P) passant par I coupe la droite (FB) en M de coordonnées :

Propositions	a. $\left(1;0;\frac{1}{4}\right)$	b. $\left(1;0;\frac{1}{5}\right)$	c. $\left(1;0;\frac{1}{3}\right)$

Réponses			

4.

Propositions	a. Les droites (EL) et (FB) sont sécantes en un point N qui est le symétrique de M par rapport à B.	b. Les droites (EL) et (IM) sont parallèles.	c. b. Les droites (EL) et (IM) sont sécantes.
Réponses			

5. Le volume du tétraèdre $FIJM$ est :

Propositions	a. $\frac{1}{36}$	b. $\frac{1}{48}$	c. $\frac{1}{24}$
Réponses			

Correction

1. Il n'y a qu'une bonne réponse : **b.** $\left(\frac{3}{4};0;0\right)$. A a pour coordonnées (0 ; 0 ; 0) et B(1 ; 0 ; 0) d'où L a pour coordonnées : $x_L=\frac{1}{3+1}(1.0+3.1)=\frac{3}{4}$ et 0 pour les autres.

2. Le plan (P) est le plan :

Propositions	a. (GLE)	b. (LEJ)	c. (GFA)
Réponses	Vrai	Faux	Faux

C'est un peu pénible car il faut regarder tous les points ; G(1 ; 1 ; 1) donc $4-4+3-3=0$ et G est dans P ; E(0 ; 0 ; 1) est aussi dans P ainsi que L. $J\left(1;\frac{1}{2};1\right)$: $4-2+3-3\neq 0$, F(1 ; 0 ; 1) : $4-0+3-3\neq 0$.

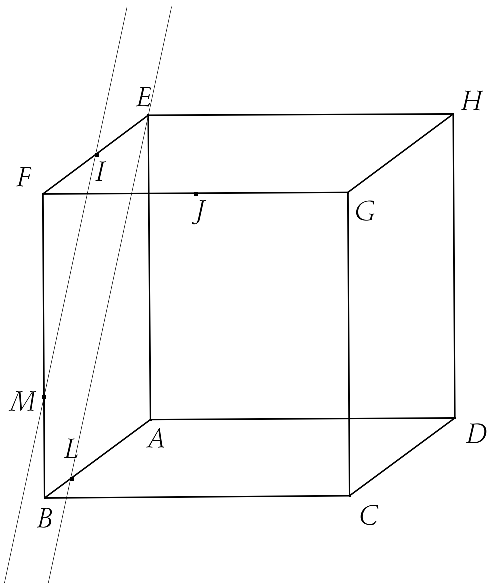
3. Une seule bonne réponse :

Propositions	a. $\left(1;0;\frac{1}{4}\right)$	b. $\left(1;0;\frac{1}{5}\right)$	c. $\left(1;0;\frac{1}{3}\right)$
Réponses	Faux	Faux	Vrai

I a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2};0;1\right)$; il nous faut l'équation de ce plan :

$$\begin{pmatrix}4\\-4\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1/2\\y-0\\z-1\end{pmatrix}=4x-2-4y+3z-3=0\Leftrightarrow 4x-4y+3z-5=0.$$

La droite (FB) est facile à trouver : $\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$; le point M est donc donné par $4-0+3z-5=0\Leftrightarrow z=\frac{1}{3}$.



4. Il y a intérêt à placer les points sur la figure… mais ce n'est pas suffisant malheureusement…

Propositions	a. Les droites (*EL*) et (*FB*) sont sécantes en un point *N* qui est le symétrique de *M* par rapport à *B*.	b. Les droites (*EL*) et (*IM*) sont parallèles.	c. b. Les droites (*EL*) et (*IM*) sont sécantes.
Réponses	Vrai	Vrai	Faux

$L\left(\frac{3}{4}\,;0\,;0\right)$, $E(0\,;\,0\,;\,1)$, $F(1\,;\,0\,;1)$, $B(1\,;\;\;0\,;\,0)$, $M\left(1\,;0:\frac{1}{3}\right)$, $\overrightarrow{EL}=\left(\frac{3}{4}\,;0\,;-1\right)$, $\overrightarrow{FB}=\left(0\,;0\,;-1\right)$, $I\left(\frac{1}{2}\,;0\,;1\right)$, $\overrightarrow{IM}=\left(\frac{1}{2}\,;0\,;-\frac{2}{3}\right)$.

(*EL*) a pour équations paramétriques $\begin{cases} x=0+\frac{3}{4}t \\ y=0 \\ z=1-t \end{cases}$ et (*FB*) : $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=1-t' \end{cases}$ d'où leur intersection donnée par

$\begin{cases} \frac{3}{4}t=1 \\ 0=0 \\ 1-t=1-t' \end{cases} \Leftrightarrow t=\frac{4}{3}=t'$. On a donc le point $N\left(1;0\,;-\frac{1}{3}\right)$; le milieu de [*MN*] est $B\left(1\,;0\,;0\right)$.

$$\overrightarrow{EL}=\left(\frac{3}{4}\,;0\,;-1\right)=k\overrightarrow{IM}=k\left(\frac{1}{2}\,;0\,;-\frac{2}{3}\right)\Leftrightarrow\begin{cases} \frac{k}{2}=\frac{3}{4} \\ 0=0 \\ -\frac{2k}{3}=-1 \end{cases}\Rightarrow k=\frac{3}{2}.$$

5.

Propositions	a. $\frac{1}{36}$	b. $\frac{1}{48}$	c. $\frac{1}{24}$
Réponses	Vrai	Faux	Faux

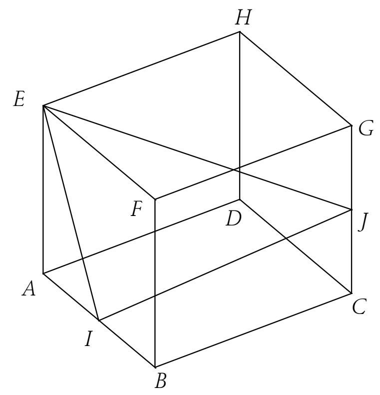
La base est le triangle *FIJ* de surface $\frac{1}{8}$, la hauteur est la longueur *FM*, soit $\frac{2}{3}$, le volume de *FIJM* est donc $\frac{1}{3}.\frac{1}{8}.\frac{2}{3}=\frac{1}{36}$.

1. 8. Vrai-Faux espace, Amérique du Sud 2005 (c)

4 points

Dans cet exercice, une réponse par « VRAI » ou « FAUX », sans justification, est demandée au candidat en regard d'une liste d'affirmations. Toute réponse conforme à la réalité mathématique donne 0,4 point. Toute réponse erronée enlève 0,1 point. L'absence de réponse n'est pas comptabilisée. Le total ne saurait être négatif.

On donne le cube $ABCDEFGH$, d'arête de longueur 1, et les milieux I et J des arêtes $[AB]$ et $[CG]$. Les éléments utiles de la figure sont donnés ci-contre. Le candidat est appelé à juger chacune des dix affirmations suivantes.



n°	Affirmation	Vrai ou Faux
1	$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}$	
2	$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB}$	
3	$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IC}$	
4	$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IJ}=AB\times AC\times\cos\frac{\pi}{3}$	

On utilise à présente le repère orthonormal $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$

n°	Affirmation	Vrai ou Faux
5	Une représentation paramétrique de la droite (IJ) est : $\begin{cases}x=t+1\\y=2t\\z=t\end{cases}$, le paramètre t décrivant $\mathbb{R}$.	
6	Une représentation paramétrique de la droite (IJ) est : $\begin{cases}x=\frac{1}{2}t+1\\y=t+1\\z=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\end{cases}$, le paramètre t décrivant $\mathbb{R}$.	
7	$6x-7y+8z-3=0$ est une équation cartésienne de la droite (IJ).	
8	L'intersection des plans (FIJ) et (ABC) est la droite passant par I et par le milieu de l'arête $[DC]$.	
9	Le vecteur de coordonnées $(-4\,;1\,;2)$ est un vecteur normal au plan (FIJ).	
10	Le volume du tétraèdre EFIJ est égal à $\frac{1}{6}$.	

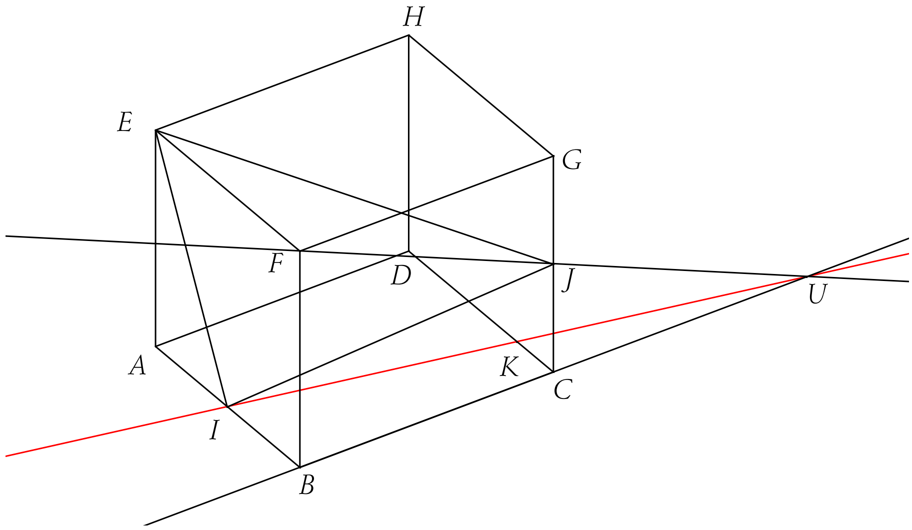
Correction

1. Vrai : la projection orthogonale de C sur (AI) est B, on a donc $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}=1.\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

2. Vrai : même chose qu'au 1.

3. Vrai : dans le plan ABJ, J se projette en B et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}$, et c'est pareil pour C dans le plan ABC.

4. Vrai : $AB = AC = 1$ et $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$.



5	Un point de passage est B ($t = 0$) qui n'est pas sur la droite.	F
6	Un point de passage est J ($t = 0$). Les coordonnées de $A(0 ; 0 ; 0)$, de $I\left(\frac{1}{2};0;0\right)$, de $J\left(1;1;\frac{1}{2}\right)$ d'où un vecteur directeur est $\left(\frac{1}{2};1;\frac{1}{2}\right)$, ok.	V
7	C'est une équation de plan.	F
8	Pour I c'est sûr, pour le milieu de $[CD]$ c'est faux : (FJ) coupe (BC) en U et (IU) coupe (DC) en K qui n'est pas au milieu de $[CD]$.	F
9	$\overrightarrow{FI}=\left(1-\frac{1}{2};0-0;1-0\right)=\left(\frac{1}{2};0;1\right)$, $\overrightarrow{FI}.\left(-4;1\ 2\right)=-2+0+2=0$; $\overrightarrow{IJ}=\left(\frac{1}{2};1;\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{IJ}.\left(-4;1;2\right)=-2+1+1=0$.	V
10	La base est EFI qui a pour aire $\frac{1}{2}$, la hauteur est $BC = 1$, donc le volume est $\frac{1}{6}$.	V

<u>1. 9. Basique, N. Calédonie 11/2008 (c)</u>

3 points

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points : $A(3 ; -2 ; 1)$ $B(5 ; 2 ; -3)$, $C(6 ; -2 ; -2)$, $D(4 ; 3 ; 2)$.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés, puis que le triangle ABC est isocèle et rectangle.

2. a. Montrer que le vecteur $\vec{n}\left(2;1;2\right)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

b. En déduire une équation du plan (ABC).

c. Montrer que la distance du point D au plan (ABC) est égale à 3.

3. Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$ en unités de volume.

Correction

1. $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}=0$, les points ne sont pas alignés car les vecteurs sont orthogonaux et $AB=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$, $BC=\sqrt{1+16+1}=3\sqrt{2}$.

2. a. $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=6+0-6=0$, $\vec{n}.\overrightarrow{BC}=2-4+2=0$.

b. $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0 \Leftrightarrow 2(x-3)+1(y+2)+2(z-1)=0 \Leftrightarrow 2x+y+2z-6=0$.

c. $d(D, ABC)=\dfrac{|2x_D+y_D+2z_D-6|}{\sqrt{4+1+4}}=\dfrac{9}{3}=3$.

3. $V=\dfrac{1}{3}\times d(D, ABC)\times Aire(ABDC)=\dfrac{1}{3}\times 3\times\dfrac{3\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}}{2}=9$.

1. 10. Orthogonalité, Am. Nord 2008

5 points

Partie A

On considère deux points A et D de l'espace et on désigne par I le milieu du segment $[AD]$.

1. Démontrer que, pour tout point M de l'espace, $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA}=MI^2-IA^2$.

2. En déduire l'ensemble (E) des points M de l'espace, tels que $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA}=0$.

Partie B

Dans l'espace rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives : $A(3\,;0\,;0)$, $B(0\,;6\,;0)$, $C(0\,;0\,;4)$ et $D(-5\,;0\,;1)$.

1. a. Vérifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

b. Déterminer une équation du plan (ABC).

2. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ, orthogonale au plan (ABC) et passant par D.

b. En déduire les coordonnées du point H, projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).

c. Calculer la distance du point D au plan (ABC).

d. Démontrer que le point H appartient à l'ensemble (E) défini dans la partie A.

Correction

Partie A

1. $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID}\right).\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)=\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)=MI^2-IA^2$ car I est le milieu de $[AD]$.

2. M appartient à (E) équivaut à $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA}=0$, c'est-à-dire à $MI^2-IA^2=0$, ou encore à $MI=IA$. Par conséquent (E) est la sphère de centre I et de rayon IA.

Partie B

1. a. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour coordonnées respectives $(-3\,;6\,;0)$ et $(-3\,;0\,;4)$.

$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=4\times(-3)+2\times 6+3\times 0=0$ et $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=4\times(-3)+2\times 0+3\times 4=0$; $\vec{n}$ est orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires du plan (ABC). $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

b. M un point de (ABC) : $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0 \Leftrightarrow (x-3)\times 4+y\times 2+z\times 3=0 \Leftrightarrow 4x+2y+3z-12=0$.

2. a. Comme Δ est orthogonale au plan (ABC), elle a pour vecteur directeur $\vec{n}$.

$$M(x\,;y\,;z)\in\Delta\Leftrightarrow\overrightarrow{DM}=k\,\vec{n}\Leftrightarrow\begin{cases}x+5=4k\\ y-0=2k\\ z-1=3k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4k-5\\ y=2k\\ z=3k+1\end{cases},\ k\in\mathbb{R}.$$

b. Soit H le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC). H est donc le point d'intersection de la droite Δ et du plan (ABC). On remplace x, y et z dans l'équation de (ABC) :

$4(4k-5)+2\times 2k+3(3k+1)-12=0\Leftrightarrow 29k-29=0\Leftrightarrow k=1$; H a pour coordonnées $(-1\ ;\ 2\ ;\ 4)$.

c. $d(D,\ (ABC))=\dfrac{|4x_D+2y_D+3z_D-12|}{\sqrt{4^2+2^2+3^2}}=\dfrac{|-20+0+3-12|}{\sqrt{29}}=\dfrac{29}{\sqrt{29}}=\sqrt{29}$.

d. $\overrightarrow{HD}=(-4\,;-2\,;-3)$ et $\overrightarrow{HA}=(4\,;-2\,;-4)$: $\overrightarrow{HD}.\overrightarrow{HA}=-16+4+12=0$, H appartient à (E).

1. 11. Tétraèdre, Pondicherry 2008 (c)

4 points

On considère un tétraèdre $ABCD$. On note I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[CD]$, $[BC]$, $[AD]$, $[AC]$ et $[BD]$.

On désigne par G l'isobarycentre des points A, B, C et D.

1. Montrer que les droites (IJ), (KL) et (MN) sont concourantes en G.

Dans la suite de l'exercice on suppose que $AB = CD$, $BC = AD$ et $AC = BD$. (On dit que le tétraèdre $ABCD$ est équifacial car ses faces sont isométriques).

2. a. Quelle est la nature du quadrilatère $IKJL$? Préciser également la nature des quadrilatères $IMJN$ et $KNLM$.

b. En déduire que (IJ) et (KL) sont orthogonales. On admettra que, de même, les droites (IJ) et (MN) sont orthogonales et les droites (KL) et (MN) sont orthogonales.

3. a. Montrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (MKN).

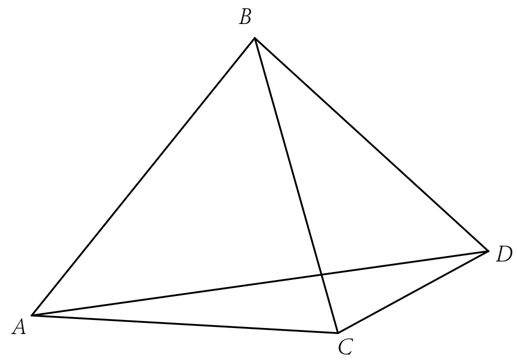
b. Quelle est la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{MK}$? En déduire que (IJ) est orthogonale à la droite (AB).

Montrer de même que (IJ) est orthogonale à la droite (CD).

c. Montrer que G appartient aux plans médiateurs de $[AB]$ et $[CD]$.

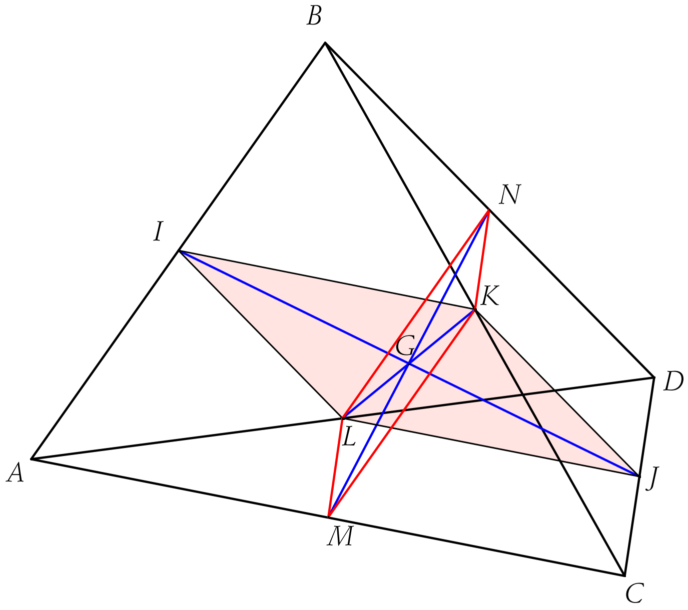
d. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Comment démontrerait-on que G est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$?



Correction

1. G est le barycentre de $\{(A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)\}$; c'est donc celui de $\{(I, 2), (J, 2)\}$, de $\{(K, 2), (L, 2)\}$ et de $\{(M, 2), (N, 2)\}$ en utilisant les barycentres partiels. Donc G est sur chacune des droites (IJ), (KL) et (MN) qui sont bien sécantes en G.



Dans la suite de l'exercice on suppose que $AB = CD$, $BC = AD$ et $AC = BD$. (On dit que le tétraèdre $ABCD$ est équifacial car ses faces sont isométriques).

2. a. On a (IK) et (LJ) parallèles à (AC) par Thalès ainsi que $IK = LJ = \frac{1}{2}AC$; de même (JK) et (LI) sont parallèles à (BD) et $JK = LI = \frac{1}{2}BD$; c'est donc un parallélogramme et comme $AC = BD$ les quatre côtés ont même longueur, c'est un losange. Le même raisonnement est valable pour les losanges $IMJN$ et $KNLM$.

b. Dans un losange les diagonales sont orthogonales donc (IJ) et (KL) sont orthogonales. De même (IJ) et (MN) sont orthogonales et (KL) et (MN) sont orthogonales.

3. a. La droite (IJ) est orthogonale à (MN) et (KL), soit deux droites distinctes du plan (MKN). (IJ) est orthogonale au plan (MKN).

b. Évidemment $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{MK} = 0$ … et comme (MK) est parallèle à (AB), (IJ) est orthogonale à la droite (AB).

On rappelle qu'une droite orthogonale à un plan est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

(IJ) est orthogonale au plan (MKN), aux droites (ML) et (NK) et donc à la droite (CD).

c. G appartient aux plans médiateurs de $[AB]$ et $[CD]$ si on a $GA = GB$ et $GC = GD$.

Par exemple on a $GA^2 = GI^2 + AI^2 = GI^2 + BI^2 = GB^2$ car (GI) est orthogonale à (AB).

d. Pour démontrer que G est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$, il faut montrer que $GA = GB = GC = GD$; on a déjà $GA = GB$ et $GC = GD$, il reste à montrer que $GB = GC$, ou encore que (GK) est orthogonale à (BC), ce qui s'obtient comme précédemment.

1. 12. Volume+produit scalaire, C. étrangers 2005 (c)

5 points

Soit $ABCD$ un tétraèdre tel que ABC, ABD et ACD soient trois triangles isocèles rectangles en A avec $AB = AC = AD = a$. On appelle A_1 le centre de gravité du triangle BCD.

1. Montrer que la droite (AA_1) est orthogonale au plan (BCD) (on pourra par exemple calculer $\overrightarrow{AA_1}.\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AA_1}.\overrightarrow{BC}$).

2. En exprimant de deux façons différentes le volume du tétraèdre $ABCD$, calculer la longueur du segment $[AA_1]$.

3. On appelle G l'isobarycentre du tétraèdre $ABCD$ et I le milieu de $[BC]$.

a. Montrer que G appartient au segment $[AA_1]$ et déterminer la longueur AG.

b. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$.

4. Soit H le symétrique de A par rapport à G.

a. Démontrer que $4\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}$.

b. Démontrer l'égalité $HC^2-HD^2=\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BA}$.

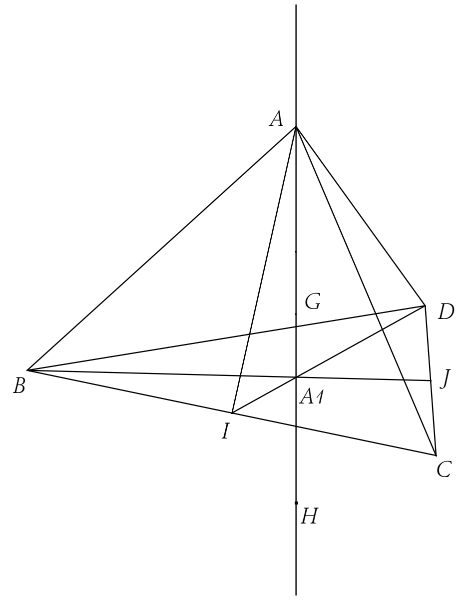
c. En déduire que $HC = HD$.

On rappelle que le volume d'une pyramide de hauteur h et d'aire de base associée b est $V=\frac{1}{3}hb$.

Correction

Attention à bien lire l'énoncé…

Soit $ABCD$ un tétraèdre tel que ABC, ABD et ACD soient trois triangles **isocèles rectangles** en A avec $AB = AC = AD = a$. On appelle A_1 le centre de gravité du triangle BCD.



1. (AA_1) est dans le plan médiateur de $[BC]$ puisque $AB=AC$ (ABC isocèle) et $A_1B=A_1C$ (BCD équilatéral), (BC) est donc orthogonale à toutes les directions de ce plan, particulièrement à (AA_1).

Le calcul des produits scalaires n'est pas nécessaire et en plus risque d'embrouiller l'esprit…

2. D'un côté on a $BC=a\sqrt{2}$, $DI=BC\frac{\sqrt{3}}{2}=a\frac{\sqrt{6}}{2}$ d'où :

$$V=\frac{1}{3}\text{aire}(BCD).AA_1=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2}a\sqrt{2}\right)AA_1=\frac{a^2\sqrt{6}}{6}AA_1,$$

d'un autre côté on a (DA) orthogonal à (AB) et (AC), donc (DA) orthogonal à (ABC), soit $V=\frac{1}{3}aire(ABC).DA=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a^2\right)a=\frac{1}{6}a^3$; on en déduit $AA_1=\frac{1}{6}a^3\frac{6}{a^2\sqrt{6}}=\frac{a}{\sqrt{6}}$.

3. a. G = barycentre de $\{(A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)\}$ ou encore de $\{(A, 1), (A_1, 3)\}$, on a donc $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AA_1}$ donc G appartient au segment $[AA_1]$ et $AG=\frac{3}{4}AA_1=\frac{3a}{4\sqrt{6}}$.

b. On introduit G dans le vecteur de gauche, I dans celui de droite, et on a $\left\|4\overrightarrow{MG}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MI}\right\|\Leftrightarrow MG=MI$.

L'ensemble cherché est le plan médiateur de $[GI]$.

4. a. On met G partout et on utilise $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$:

$$4\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GA}\Leftrightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{BG}=\vec{0}\ ..$$

b. On factorise : $HC^2-HD^2=\left(\overrightarrow{HC}-\overrightarrow{HD}\right)\left(\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HD}\right)=\overrightarrow{DC}.2\overrightarrow{HJ}=\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BA}$ (Thalès dans $ABHJ$).

c. Comme (DC) est orthogonal à (AB), on a $HC^2=HD^2\Rightarrow HC=HD$.

<u>1. 13. Distance minimale, N. Calédonie 06/2008</u>

5 points

L'espace est rapporté à un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, orthonormé. Soit t un nombre réel.

On donne le point $A(-1\ ;2\ ;3)$ et la droite D de système d'équations paramétriques : $\begin{cases} x=9+4t \\ y=6+t \\ z=2+2t \end{cases}$.

Le but de cet exercice est de calculer de deux façons différentes la distance d entre le point A et la droite D.

1. a. Donner une équation cartésienne du plan P perpendiculaire à la droite D et passant par A.

b. Vérifier que le point $B(-3\ ;3\ ;-4)$ appartient à la droite D.

c. Calculer la distance d_B entre le point B et le plan P.

d. Exprimer la distance d en fonction de d_B et de la distance AB. En déduire la valeur exacte de d.

2. Soit M un point de la droite D. Exprimer AM^2 en fonction de t. Retrouver alors la valeur de d.

Correction

1. a. Un vecteur directeur de D est $(4\,;1\,;2)$: $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow 4x+y+2z-4=0$.

b. Il faut trouver t : $\begin{cases} -3=9+4t \\ 3=6+t \\ -4=2+2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-3 \\ t=-3 \\ t=-3 \end{cases}$; on a la même valeur de t pour les trois lignes donc B est bien sur la droite.

c. On applique la formule de la distance : $d_B=\dfrac{|4\times-3+1\times3+2\times-4-4|}{\sqrt{4^2+1^2+2^2}}=\dfrac{21}{\sqrt{21}}=\sqrt{21}$.

d. A est sur le plan P, B est sur la droite D orthogonale à P, on utilise le théorème de Pythagore :

$$AB^2=d^2+d_B^2 \Leftrightarrow d^2=AB^2-d_B^2=(-2)^2+1^2+(-7)^2-21=54-21=33 \Rightarrow d=\sqrt{33}.$$

2. $AM^2=(9+4t+1)^2+(6+t-2)^2+(2+2t-3)^2=100+80t+16t^2+16+8t+t^2+4t^2-4t+1$, soit $AM^2=f(t)=117+84t+21t^2$; le minimum de f est atteint lorsque $f'(t)=0 \Leftrightarrow 84+42t=0 \Leftrightarrow t=-2$, soit une distance minimale $d=\sqrt{f(-2)}=\sqrt{117-168+84}=\sqrt{33}$.

<u>1. 14. Distance point-droite, France 06/2008 (c)</u>

5 points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(1, 1, 0)$, $B(1, 2, 1)$ et $C(3, -1, 2)$.

1. a. Démontrer que les points *A, B* et *C* ne sont pas alignés.

b. Démontrer que le plan *(ABC)* a pour équation cartésienne $2x+y-z-3=0$.

2. On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives $x+2y-z-4=0$ et $2x+3y-2z-5=0$.

Démontrer que l'intersection des plans (P) et (Q) est une droite (D) dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x=-2+t \\ y=3 \\ z=t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

3. Quelle est l'intersection des trois plans *(ABC)*, (P) et *(Q)* ?

4. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer la distance du point A à la droite (D).

Correction

1. a. $\overrightarrow{AB}=(0\,;1\,;1)$, $\overrightarrow{AC}=(2\,;-2\,;2)$, les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, les points *A, B* et *C* ne sont pas alignés.

b. Soit $\vec{n}=(2;1;-1)$ un vecteur normal à $2x+y-z-3=0$; on a alors $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0+1-1=0$ et $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=4-2-2=0$; par ailleurs A vérifie $2x+y-z-3=0$. Donc *(ABC)* a pour équation $2x+y-z-3=0$.

2. $\begin{cases} x+2y-t-4=0 \\ 2x+3y-2t-5=0 \\ z=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=t+4 \\ 2x+3y=2t+5 \\ z=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y+t+4 \\ -4y+2t+8+3y=2t+5 \\ z=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2+t \\ y=3 \\ z=t \end{cases}$.

3. Remplaçons : $2x+y-z-3=0 \Leftrightarrow 2(-2+t)+3-t-3=0 \Leftrightarrow t=4$; les plans se coupent en un point : $D(2;3:4)$.

4. On remarque que A est dans (Q), mais ça n'avance pas à grand chose. Il faut trouver le plan passant par A et orthogonal à (D) puis le point d'intersection E entre ce plan et (D) :

$\overrightarrow{u_D}=(1;0;1)$, $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u_D}=0 \Leftrightarrow (x-1).1+(y-1).0+(z-0).1=0 \Leftrightarrow x+z-1=0$;

on coupe avec (D) : $(-2+t)+t-1=0 \Leftrightarrow t=\frac{3}{2}$ d'où $E\left(-\frac{1}{2};3;\frac{3}{2}\right)$ et

$$AE=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2+(3-1)^2+\left(\frac{3}{2}-0\right)^2}=\sqrt{\frac{34}{4}}.$$

1. 15. Distance point-droite, La Réunion sept. 2010

5 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les plans P et Q d'équations respectives : $x+y+z=0$ et $2x+3y+z-4=0$.

1. Montrer que l'intersection des plans P et Q est la droite D dont une représentation paramétrique est :

$\begin{cases} x=-4-2t \\ y=4+t \\ z=t \end{cases}$ où t est un nombre réel.

2. Soit λ un nombre réel.

On considère le plan P_λ d'équation : $(1-\lambda)(x+y+z)+\lambda(2x+3y+z-4)=0$.

a. Vérifier que le vecteur $\vec{n}(1+\lambda;1+2\lambda;1)$ est un vecteur normal du plan P_λ.

b. Donner une valeur du nombre réel λ pour laquelle les plans P et P_λ sont confondus.

c. Existe-t-il un nombre réel λ pour lequel les plans P et P_λ sont perpendiculaires ?

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite D', intersection des plans P et P_{-1}.

Montrer que les droites D et D' sont confondues.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche,même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

On considère le point $A(1;1;1)$.

Déterminer la distance du point A à la droite D, c'est-à-dire la distance entre le point A et son projeté orthogonal sur la droite D.

Correction

1. $M(x,y,z)\in P\cap Q \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+3y+z-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y-t \\ 2x+3y=4-t \\ z=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y-t \\ -2y-2t+3y=4-t \\ z=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4-2t \\ y=4+t \\ z=t \end{cases}$.

Ce sont bien les équations paramétriques d'une droite D contenant le point $(-4;4;0)$ en posant $t=0$, et de vecteur directeur $(-2;1;1)$.

2. a. On développe et on regroupe suivant les variables :

$$(1-\lambda)(x+y+z)+\lambda(2x+3y+z-4)=0 \Leftrightarrow (1-\lambda+2\lambda)x+(1-\lambda+3\lambda)y+(1-\lambda+\lambda)z-4\lambda=0$$
$$\Leftrightarrow (1+\lambda)x+(1+2\lambda)y+z-4\lambda=0,$$

dont un vecteur normal est $\vec{n}(1+\lambda\,;1+2\lambda\,;1)$.

b. Les plans P et P_λ sont confondus si et seulement si les coefficients de leurs équations sont proportionnels, soit : $\frac{1+\lambda}{1}=\frac{1+2\lambda}{1}=\frac{1}{1}$, ce qui conduit à $\lambda=0$.

c. Un vecteur normal au plan P est $\vec{p}=(1;1;1)$. P et P_λ sont perpendiculaires si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux, soit $\vec{n}.\vec{p}=0 \Leftrightarrow 1+\lambda+1+2\lambda+1=0 \Leftrightarrow \lambda=-1$.

3. Le plan P_{-1} d'équation $-y+z+4=0$ est perpendiculaire au plan P.

Comme à la question 1. il faut résoudre le système : $\begin{cases} x+y+z=0 \\ -y+z-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y-t \\ y=4+t \\ z=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4-2t \\ y=4+t \\ z=t \end{cases}$, ce qui redonne D.

4. Soit H et K les projeté orthogonaux de A respectivement sur P et P_{-1} ; soit I le projeté orthogonal de A sur D. Les points A, H, K et I sont coplanaires : ils appartiennent au plan perpendiculaire à P et P_{-1} contenant A. (AH) et (AK) perpendiculaires à deux plans perpendiculaires sont perpendiculaires.

Le quadrilatère AHIK est donc un rectangle.

On a $d(A,P)=AH=\frac{|1+1+1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$ et $d(A,P_{-1})=AK=\frac{|-1+1+4|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$. D'après le théorème de Pythagore : $AI^2=AH^2+AK^2=3+8=11 \Rightarrow d(A,D)=\sqrt{11}$.

Autre méthode : Soit M un point de D,

$$AM=\sqrt{(x_M-x_A)^2+\dots}=\sqrt{(-4-2t-1)^2+(4+t-1)^2+(t-1)^2}=\sqrt{(-5-2t)^2+(3+t)^2+(t-1)^2}=f(t).$$

Dérivons : $f'(t)=\frac{-4(-5-2t)+2(3+t)+2(t-1)}{\sqrt{\dots}}=\frac{12t+24}{\sqrt{\dots}}$ s'annule pour $t=-2$; la distance est minimale pour $M(0;2;-2)$ et vaut $f(-2)=\sqrt{11}$.

1. 16. Distance point-plan, Asie 2006 (c)

5 points

On considère le cube *ABCDEFGH* représenté ci-dessous. Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$. On note I le point de coordonnées $\left(\frac{1}{3}\,;1\,;1\right)$.

1. Placer le point I sur la figure.

2. Le plan (ACI) coupe la droite (EH) en J. Démontrer que les droites (IJ) et (AC) sont parallèles.

3. On note R le projeté orthogonal de I sur la droite (AC).

a. Justifier que les deux conditions suivantes sont vérifiées :

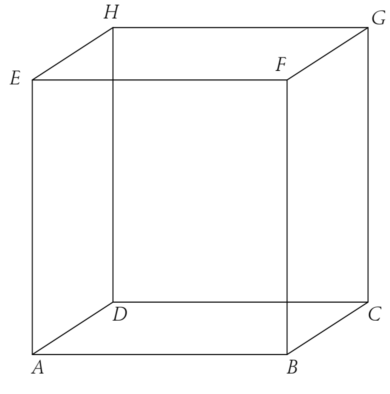
(i) Il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AR}=k\overrightarrow{AC}$.

(ii) $\overrightarrow{IR}.\overrightarrow{AC}=0$.

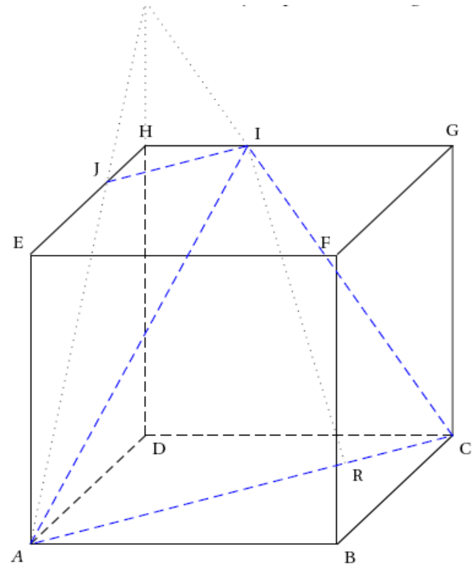
b. Calculer les coordonnées du point R.

c. En déduire que la distance IR s'exprime par $IR=\frac{\sqrt{11}}{3}$.

4. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(3\,;-3\,;2)$ est normal au plan (ACI). En déduire une équation cartésienne du plan (ACI).



5. Montrer que la distance du point F au plan (ACI) est $\frac{5}{\sqrt{22}}$.



Correction

1. Voir figure.

2. Construction du point J :

– Dans le plan $CDHG$, la droite (IC) coupe la droite (DH) en un point P ;

– Dans le plan $ADHE$ la droite (PA) coupe la droite (EH) en J.

Le plan (ACI) est donc coupé par les deux faces parallèles ($ABCD$) et ($EFGH$) : les intersections (AC) et(IJ) sont donc parallèles.

3. a. $R \in \left(AC\right)$: il existe un réel unique k tel que $\overrightarrow{AR} = k\overrightarrow{AC}$. Comme ($IR$) et ($AC$) sont orthogonales, on a $\overrightarrow{IR}.\overrightarrow{AC} = 0$.

b. Si R a pour coordonnées (x, y, z), $\begin{cases} x = k \\ y = k \\ z = 0 \end{cases}$. D'où en remplaçant par les coordonnées de R :

$$\overrightarrow{IR}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{3}\right).1 + \left(y-1\right).1 + \left(z-1\right).0 = 0 \Leftrightarrow x + y - \frac{4}{3} = 0 \Rightarrow 2k = \frac{4}{3} \Rightarrow k = \frac{2}{3} \Rightarrow R\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0\right).$$

c. $IR = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + 1} = \frac{\sqrt{11}}{3}$.

4. $\vec{n}$ (3 ; −3 ; 2) est normal au vecteur $\overrightarrow{AC}$ (1 ; 1 ; 0) (produit scalaire nul) et au vecteur $\overrightarrow{AI}\left(\frac{1}{3}; 1; 1\right)$.

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ACI) est un vecteur normal à ce plan.

Une équation du plan (ACI) est donc $\vec{n}.\overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow 3x - 3y + 2z = 0$.

5. Avec F(1 ; 0 ; 1) on a $d\left(F, ACI\right) = \frac{\left|3\times1 - 3\times0 + 2\times1\right|}{\sqrt{22}} = \frac{5}{\sqrt{22}}$.

1. 17. Distance point-plan, Pondicherry 2006 (c)

4 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Partie A

Cette partie constitue une restitution organisée de connaissances.

Soient a, b, c et d des réels tels que $\left(a, b, c\right) \neq \left(0, 0, 0\right)$. Soit P le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$. On considère le point I de coordonnées $\left(x_I, y_I, z_I\right)$ et le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\left(a, b, c\right)$.

Le but de cette partie est de démontrer que la distance de I au plan P est égale à $\frac{\left|ax_I + by_I + cz_I + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

1. Soit la droite Δ passant par I et orthogonale au plan P. Déterminer en fonction de a, b, c, d, x_I, y_I et z_I un système d'équations paramétriques de Δ.

2. On note H le point d'intersection de Δ et P.

a. Justifier qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{IH} = k\vec{n}$.

b. Déterminer l'expression de k en fonction de a, b, c, d, x_I, y_I et z_I.

c. En déduire que $IH=\dfrac{|ax_I+by_I+cz_I+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Partie B

Le plan Q d'équation $x-y+z-11=0$ est tangent à une sphère S de centre le point Ω de coordonnées $(1\,;-1\,;3)$.

1. Déterminer le rayon de la sphère S.

2. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par Ω et orthogonale au plan Q.

3. En déduire les coordonnées du point d'intersection de la sphère S et du plan Q.

Correction

Partie A

1. Une équation de P est $ax+by+cz+d=0$ donc le vecteur $\vec{n}=(a,b,c)$ est un vecteur normal à P. Or P donc $\vec{n}$ est un vecteur directeur de Δ. Δ passe par $I(x_I, y_I, z_I)$ et a pour vecteur directeur $\vec{n}\ (a,b,c)$ donc une représentation paramétrique de Δ est $\begin{cases} x=x_I+at \\ y=y_I+bt\ , t\in\mathbb{R} \\ z=z_I+ct \end{cases}$.

2. a. $H\in\Delta$ donc $\overrightarrow{IH}\perp$ P, $\overrightarrow{IH}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, il existe k réel tel que $\overrightarrow{IH}=k\vec{n}$.

b. $\overrightarrow{IH}=k\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H-x_I=ka \\ y_H-y_I=kb \\ z_H-z_I=kc \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H=x_I+ka \\ y_H=y_I+kb \\ z_H=z_I+kc \end{cases}$. Or $H\in$ P donc ses coordonnées vérifient l'équation de P et ainsi,

$$a(x_I+ka)+b(y_I+kb)+c(z_I+kc)+d=0 \Leftrightarrow k\left(a^2+b^2+c^2\right)=-(ax_I+by_I+cz_I+d)$$

$$\Leftrightarrow k=\frac{-(ax_I+by_I+cz_I+d)}{\left(a^2+b^2+c^2\right)}.$$

c. $\overrightarrow{IH}=k\vec{n}$ donc $IH=|k|\times\|\vec{n}\|$, or $|k|=\dfrac{|ax_I+by_I+cz_I+d|}{a^2+b^2+c^2}$ et $\|\vec{n}\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ d'où $IH=\dfrac{|ax_I+by_I+cz_I+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Partie B

1. Q est tangent à S donc la distance de Q à Ω est égale à r où r est le rayon de S.

Or dist(Q ; Ω) $=\dfrac{|x_\Omega-y_\Omega+z_\Omega-11|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\dfrac{|1+1+3-11|}{\sqrt{3}}=\dfrac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$. Le rayon de la sphère S est égal à $2\sqrt{3}$.

2. Δ est orthogonale au plan Q donc un vecteur normal à Q est un vecteur directeur de Δ. Or $\vec{n}$ (1 ; –1 ; 1) est un vecteur normal à Q. De plus, Δ passe par Ω (1 ; –1 ; 3) donc une représentation paramétrique de Δ est $\begin{cases} x=1+t \\ y=-1-t,\ t\in\mathbb{R} \\ z=3+t \end{cases}$.

3. Q est tangent à S donc il existe un unique point d'intersection entre Q et S. Soit $M(x\,;y\,;z)$ ce point. La droite Δ est orthogonale à Q et passe par le centre de S, donc M appartient aussi à Δ et ainsi les coordonnées de M vérifient les équations de Δ et Q.

On a donc (1 + t) – (–1 – t) + (3 + t) – 11 = 0 $\Leftrightarrow$ $3t - 6 = 0$ $\Leftrightarrow$ $t = 2$ donc $\begin{cases} x = 1+2 = 3 \\ y = -1-2 = -3 \\ z = 3+2 = 5 \end{cases}$.

L'intersection de Q et S a pour coordonnées (3 ; – 3 ; 5).

1. 18. Distance 1 point à 2 plans, France 2007 (c)

3 points

L'espace est muni du repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$. Soient (P) et (P') les plans d'équations respectives $x+2y-z+1=0$ et $-x+y+z=0$. Soit A le point de coordonnées (0 ; 1 ; 1).

1. Démontrer que les plans (P) et (P') sont perpendiculaires.

2. Soit (d) la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{3}+t \\ y = -\dfrac{1}{3} \\ z = t \end{cases}$ où t est un nombre réel.

Démontrer que les plans (P) et (P') se coupent selon la droite (d).

3. Calculer la distance du point A à chacun des plans (P) et (P').

4. En déduire la distance du point A à la droite (d).

Correction

1. $\overrightarrow{n_{\mathrm{P}}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{n_{\mathrm{P'}}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{n_{\mathrm{P}}}.\overrightarrow{n_{\mathrm{P'}}} = -1+2-1 = 0$ donc les plans (P) et (P') sont perpendiculaires.

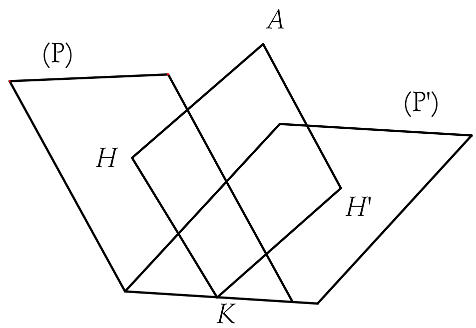
2. $\begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ -x+y+z=0 \\ z=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=t-1 \\ -x+y=-t \\ z=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2/3+t-1 \\ y=-1/3 \\ z=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t-1/3 \\ y=-1/3 \\ z=t \end{cases}$.

3. $d(A,\mathrm{P}) = \dfrac{|0+2-1+1|}{\sqrt{1+4+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$, $d(A,\mathrm{P'}) = \dfrac{|0+1+1|}{\sqrt{1+1+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

4. Soit H et H' les projections orthogonales de A sur les plans ; K le point d'intersection entre le plan (AHH') et (d) ; la distance de A à (d) est AK.

Par ailleurs les deux plans sont orthogonaux, $AHKH'$ est donc un rectangle, soit

$$AK^2 = AH^2 + AH'^2 = \frac{4}{6}+\frac{4}{3} = \frac{12}{6} = 2 \Rightarrow AK = \sqrt{2}.$$



Autre méthode : prenons un point M de paramètre t sur (d) ;

$$AM^2 = f(t) = \left(t-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}-1\right)^2 + (t-1)^2$$

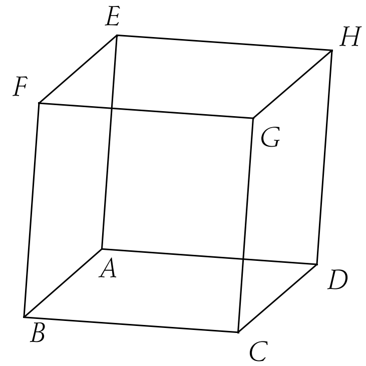
soit $f(t) = t^2 - \dfrac{2}{3}t + \dfrac{1}{9} + \dfrac{16}{9} + t^2 - 2t + 1 = 2t^2 - \dfrac{8}{3}t + \dfrac{26}{9}$.

Le minimum de f est atteint pout $4t - \dfrac{8}{3} = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{2}{3}$, soit au point K de coordonnées $\left(\dfrac{1}{3}\,;-\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{2}{3}\right)$, et

$$AK^2 = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{9} - \frac{16}{9} + \frac{26}{9} = 2 \Leftrightarrow AK = \sqrt{2}.$$

1. 19. Distance droite-droite, Polynésie sept 2007 (c)

4 points



On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 3.

On choisit le repère orthonormal $(D ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que $\vec{i}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$, $\vec{j}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$, $\vec{k}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DH}$.

1. a. Donner les coordonnées des points A, C, E.

b. Déterminer les coordonnées du point L barycentre du système $\{(C, 2) ; (E, 1)\}$.

c. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DL}$.

2. Soit (a, b) un couple de réels. On note M le point de la droite (AE) tel que $\overrightarrow{AM}=a\overrightarrow{AE}$ et N le point de la droite (DL) tel que $\overrightarrow{DN}=b\overrightarrow{DL}$.

a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DL}$ si et seulement si le couple (a, b) vérifie le système $\begin{cases}-a+2b=1\\3a-b=0\end{cases}$.

b. En déduire qu'il existe un seul point M_0 de (AE) et un seul point N_0 de (DL) tels que la droite (M_0N_0) est orthogonale aux droites (AE) et (DL).

c. Déterminer les coordonnées des points M_0 et N_0 puis calculer la distance M_0N_0.

Correction

1. a. $A(3, 0, 0)$, $C(0, 3, 0)$, $E(3, 0, 3)$.

b. $x_L=\frac{1}{2+1}(2.x_C+1.x_E)=1$, $y_L=2$, $z_L=1$.

c. $\overrightarrow{AE}=(0 ; 0 ; 3)$, $\overrightarrow{DL}=(1 ; 2 ; 1)$.

2. Soit (a, b) un couple de réels. On note M le point de la droite (AE) tel que et N le point de la droite (DL) tel que $\overrightarrow{DN}=b\overrightarrow{DL}$.

a. $\overrightarrow{AM}=a\overrightarrow{AE}=(0 ; 0 ; 3a)$, $\overrightarrow{DN}=b\overrightarrow{DL}=(b ; 2b ; b)$, $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}=\begin{pmatrix}-3+b\\2b\\-3a+b\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{DL}=(-3+b).1+2b.2+(-3a+b).1=-3+6b-3a=0 \Leftrightarrow 2b-a=1$.

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AE}=(b-3).0+2b.0+(-3a+b).3=3b-9a=0 \Leftrightarrow 3a-b=0$.

b. On résoud : $\begin{cases}-a+2b=1\\3a-b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2b-1=a\\6b-3-b=0\end{cases} \Leftrightarrow \left\{ b=\frac{5}{3}, a=\frac{7}{3}\right.$.

(M_0N_0) est orthogonale aux droites (AE) et (DL).

c. On a donc $\overrightarrow{AM_0}=(0 ; 0 ; 7) \Rightarrow M_0(3 ; 0 ; 7)$ et $\overrightarrow{DN_0}=\left(\frac{5}{3} ; \frac{10}{3} ; \frac{5}{3}\right) \Rightarrow N_0=\left(\frac{5}{3} ; \frac{10}{3} ; \frac{5}{3}\right)$;

$$M_0N_0=\sqrt{\left(\frac{5}{3}-3\right)^2+\left(\frac{10}{3}-0\right)^2+\left(\frac{5}{3}-7\right)^2}=\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{100}{9}+\frac{256}{9}}=\frac{2\sqrt{93}}{3}.$$

1. 20. Droites, plan, barycentre, Pondicherry 2005 (c)

5 points

L'espace E est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(1\,;0\,;2)$, $(1\,;1\,;4)$ et $(-1\,;1\,;1)$.

1. a. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(3\,;4\,;-2)$. Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

2. Soient P_1 et P_2 les plans d'équations respectives $2x+y+2z+1=0$ et $x-2y+6z=0$.

a. Montrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants suivant une droite D dont on déterminera un système d'équations paramétriques.

b. La droite D et le plan (ABC) sont-ils parallèles ?

3. Soit t un réel positif quelconque. On considère le barycentre G des points A, B et C affectés des coefficients 1, 2 et t.

a. Justifier l'existence du point G pour tout réel positif t.

Soit I le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs 1 et 2. Déterminer les coordonnées du point I.

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{IC}$.

b. Montrer que l'ensemble des points G lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls est le segment [IC] privé du point C. Pour quelle valeur de t, le milieu J du segment [IC] coïncide-t-il avec G ?

Correction

$A(1\,;0\,;2), B(1\,;1\,;4)$ et $C(-1\,;1\,;1)$.

1. a. $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1-1\\1-0\\4-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-1-1\\1-0\\1-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$, ces vecteurs ne sont pas colinéaires :

$$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\begin{cases}0=-2k\\1=k\\2=-k\end{cases}\ \ldots\text{ bof.}$$

b. $\overrightarrow{AB}.\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}=0+4-4=0$ et $\overrightarrow{AC}.\vec{n}=\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}=-6+4+2=0$. Le plan ($ABC$) a pour équation :

$$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x-1\\y-0\\z-2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow 3x-3+4y-2z+4=0\Leftrightarrow 3x+4y-2z+1=0.$$

2. a. Quand on intersecte P_1 et P_2 on a le système suivant : $\begin{cases}2x+y+2z+1=0\\x-2y+6z=0\end{cases}$, soit en posant par exemple

$$z=t\ :\begin{cases}2x+y=-2t-1\\x-2y=-6t\\z=t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5y=10t-1\\x=2y-6t\\z=t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4t-2/5-6t=-2t-2/5\\y=2t-1/5\\z=t\end{cases}.$$

On peut noter qu'un vecteur directeur de D est $\vec{u}=(-2\,;2\,;1)$.

b. D et (ABC) sont parallèles si $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux : $\vec{n}.\vec{u}=\begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}=-6+8-2=0$; ils sont bien parallèles.

3. G barycentre des points A, B et C affectés des coefficients 1, 2 et t.

a. G existe si la somme des coefficients ici $3+t$ n'est pas nulle, ce qui est vrai pour tout réel positif t.

$I\left(\frac{1.1+2.1}{3},\frac{1.0+2.1}{3},\frac{1.2+2.4}{3}\right)=\left(1,\frac{2}{3},\frac{10}{3}\right)$. G est donc le barycentre de (I ; 3), (C ; t) d'où $\overrightarrow{IG}=\frac{t}{3+t}\overrightarrow{IC}$.

b. La fonction $f(t)=\frac{t}{3+t}$ a pour dérivée $f'(t)=\frac{1(3+t)-t.1}{(3+t)^2}=\frac{3}{(3+t)^2}>0$ et est croissante ; en 0 elle vaut 0, en $+\infty$ elle vaut 1 (sa limite est 1 en $+\infty$).

Lorsque t parcourt les réels positifs, l'abscisse du point G dans le repère $(I,\overrightarrow{IC})$ est $f(t)$, donc cette abscisse varie entre 0 et 1, et G parcourt le segment [IC] sauf le point C qui est à la limite (la limite n'est pas atteinte).

Le milieu J du segment [IC] coïncide avec G lorsque $f(t)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{t}{3+t}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2t=3+t\Leftrightarrow t=3$.

1. 21. Plan médiateur, sphère, Antilles 2005 (c)

6 points

A. Soit [KL] un segment de l'espace ; on note I son milieu. On appelle plan médiateur de [KL] le plan perpendiculaire en I à la droite (KL).

Démontrer que le plan médiateur de [KL] est l'ensemble des points de l'espace équidistants de K et L.

B. Ici l'espace est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$; on considère les points

$$A(4\,;0\,;-3),\ B(2\,;2\,;2),\ C(3\,;-3\,;-1),\ D(0\,;0\,;-3).$$

1. Démontrer que le plan médiateur de [AB] a pour équation

$$4x-4y-10z-13=0.$$

On admet pour la suite que les plans médiateurs de [BC] et [CD] ont respectivement pour équations

$$2x-10y-6z-7=0 \text{ et } 3x-3y+2z-5=0.$$

2. Démontrer, en résolvant un système d'équations linéaires, que ces trois plans ont un unique point commun E dont on donnera les coordonnées.

3. En utilisant la partie A montrer que les points A, B, C et D sont sur une sphère de centre E. Quel est le rayon de cette sphère ?

Correction

A. M appartient au plan médiateur de [KL] si $MK=ML$, soit

$$\overrightarrow{MK}^2=\overrightarrow{ML}^2\Leftrightarrow\overrightarrow{MK}^2-\overrightarrow{ML}^2=0\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MK}-\overrightarrow{ML}\right)\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{ML}\right)=0\Leftrightarrow\overrightarrow{LM}.2\overrightarrow{MI}=0.$$

C'est le plan perpendiculaire en I à la droite (KL).

B. 1. I a pour coordonnées (3 ; 1 ; –1/2) ;

$$\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x-3\\y-1\\z+1/2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-2\\2\\5\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow-2x+2y+5z+6-2+\frac{5}{2}=0\Leftrightarrow 4x-4y-10z-13=0.$$

2.

$$\begin{cases}4x-4y-10z-13=0\\3x-3y+2z-5=0\\2x-10y-6z-7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}12x-12y-30z-39=0\\12x-12y+8z-20=0\\2x-10y-6z-7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x-4y-10z-13=0\\-38z-19=0\Leftrightarrow z=-1/2\\2x-10y-6z-7=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4x-4y-8=0\\z=-1/2\\2x-10y-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y+2\\z=-1/2\\x-5y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\z=-1/2\\y=0\end{cases}$$

E a pour coordonnées (2 ; 0 ; –1/2).

3. Les points A, B, C et D sont équidistants de E car situés sur les plans médiateurs, ils sont donc sur une sphère de centre E.

Le rayon de cette sphère est $AE=\sqrt{(2-4)^2+(0-0)^2+(-1/2+3)^2}=\dfrac{\sqrt{41}}{2}$.

1. 22. Droites, plan, sphère, Polynésie 2003 (c)

5 points

L'espace est rapporté à un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orthonormé. Soit s un nombre réel.

On donne les points A (8 ; 0 ; 8), B (10 ; 3 ; 10) ainsi que la droite D d'équations paramétriques :

$$\begin{cases}x=-5+3s\\y=1+2s\\z=-2s\end{cases}.$$

1. a. Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ définie par A et B.

b. Démontrer que D et Δ sont non coplanaires.

2. a. Le plan P est parallèle à D et contient Δ. Montrer que le vecteur $\vec{n}(2\,;-2\,;1)$ est un vecteur normal à P. Déterminer une équation cartésienne de P.

b. Montrer que la distance d'un point quelconque M de D à P est indépendante de M.

c. Donner un système d'équations paramétriques de la droite définie par l'intersection de P avec le plan (xOy).

3. La sphère S est tangente à P au point C(10 ; 1 ; 6). Le centre Ω de S se trouve à la distance d = 6 de P, du même côté que O. Donner l'équation cartésienne de S.

Correction

1. $\begin{cases}x=8+2t\\y=3t\\z=8+2t\end{cases}$. D et Δ sont coplanaires soit parcequ'elles sont parallèles or leurs vecteurs directeurs sont $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$. et $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}$ qui ne sont pas colinéaires, soit parce qu'elles sont sécantes :

$$\begin{cases}x=8+2t=-5+3s\\y=3t=1+2s\\z=8+2t=-2s\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-5+3s=-2s\Leftrightarrow s=1\\y=3t=1+2s\Rightarrow 3t=3\Rightarrow t=1\\x=8+2t=-5+3s\Leftrightarrow 10=-2\end{cases}\text{ ce qui ne marche pas.}$$

2. a. $\vec{n}(2\,;-2\,;1)$ est orthogonal au vecteur directeur $\vec{u}$ de D : $\vec{u}.\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=4-6+2=0$; c'est bien un vecteur normal à P puisque D est parallèle à P. Un point de P est par exemple un point de Δ : pour $s=0$, $C(-5\,;1\,;0)$. $\overrightarrow{CM}.\vec{n}=0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow 2x-2y+z+12=0$.

b. Cherchons la distance entre M sur D et P : $d(M,P)=\dfrac{|2(8+2t)-2(3t)+(8+2t)+12|}{\sqrt{4+4+1}}=\dfrac{|36|}{3}=12$.

Ceci dit c'est évident, si D est parallèle à P, la distance de D à P est forcément constante…

c. $\begin{cases} 2x-2y+z+12=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t-6 \\ y=t \\ z=0 \end{cases}$.

3. $(C\Omega)$ est orthogonal au plan P puisque la sphère est tangente en C à P. On cherche Ω tel que $\overrightarrow{C\Omega}=k\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x_\Omega=10+2k \\ y_\Omega=1-2k \\ z_\Omega=6+k \end{cases}$.

La distance $C\Omega=6$, soit $(x_\Omega-10)^2+(y_\Omega-1)^2+(z_\Omega-6)^2=36 \Rightarrow k^2=4 \Rightarrow k=\pm 2$. On a donc deux points possibles : $(4\,;-3\,;8)$ et $(6\,;5\,;4)$; le plus près de O est le deuxième, c'est le point cherché.

1. 23. Barycentre, Polynésie 2007 (c)

5 points

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A\left(\frac{2}{3}\,;-3\,;2\right)$ et $B\left(-\frac{4}{3}\,;0\,;-4\right)$. On note I le milieu du segment $[AB]$ et (S) la sphère de diamètre $[AB]$.

1. Soit E le barycentre des points pondérés $(A\,;2)$ et $(B\,;1)$.

a. Calculer les coordonnées de E.

b. Montrer que l'ensemble (P) des points M de l'espace tels que $\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|=3\|\overrightarrow{MO}\|$ est le plan médiateur du segment $[OE]$.

c. Montrer qu'une équation du plan (P) est $y=-1$.

2. a. Calculer le rayon de la sphère (S) et la distance du centre I de la sphère au plan (P). En déduire que l'intersection (C) du plan (P) et de la sphère (S) n'est pas vide.

b. Montrer qu'une équation de (C) dans le plan (P) est $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+(z+1)^2=12$. En déduire que (C) est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

3. Soit D le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{3}\,;-\frac{1}{2}\,;4\sqrt{3}-1\right)$.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (ID).

b. En déduire que la droite (ID) est sécante au cercle (C) en un point noté F dont on donnera les coordonnées.

Correction

1. a. $x_E=\frac{1}{3}\left(2\times\frac{2}{3}+1\times-\frac{4}{3}\right)=0$, $y_E=-2$, $z_E=0$.

b. $\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|=3\|\overrightarrow{MO}\| \Leftrightarrow 3ME=3MO \Leftrightarrow ME=MO$, (P) est le plan médiateur du segment $[OE]$.

c. $ME=MO \Leftrightarrow (x-0)^2+(y+2)^2-(z-0)^2=(x-0)^2+(y-0)^2-(z-0)^2 \Leftrightarrow y^2+4y+4=y^2$ donc une équation du plan (P) est $y=-1$.

2. a. I a pour coordonnées : $\left(-\frac{1}{3}\,;-\frac{3}{2}\,;-1\right)$. Le rayon de (S) est $\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\sqrt{4+9+36}=\frac{7}{2}$;

$d(I,\mathrm{P})=\frac{\left|-\frac{3}{2}+1\right|}{1}=\frac{1}{2}$. Comme cette distance est inférieure au rayon de (S), il y a intersection.

b. On fait l'intersection entre (S) et (P) : $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+(z+1)^2=\frac{49}{4}$ et $y=-1$, soit

$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(-1+\frac{3}{2}\right)^2+(z+1)^2=\frac{49}{4}\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+(z+1)^2=\frac{49}{4}-\frac{1}{4}=12.$$

Le centre de (C) est le point $\left(-\frac{1}{3}\,;-1\,;-1\right)$, le rayon est $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

3. Soit D le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{3}\,;-\frac{1}{2}\,;4\sqrt{3}-1\right)$.

a. $\overrightarrow{IM}=t\overrightarrow{ID}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1/3=t\times 0\\ y+3/2=t\times 1\\ z+1=t\times 4\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1/3\\ y=-3/2+t\\ z=-1+t4\sqrt{3}\end{cases}$.

b. On remplace dans l'équation de (C) : $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+(z+1)^2=12\Rightarrow 0+48t^2=12\Rightarrow t=\pm\frac{1}{2}$, soit les points

$\begin{cases}x=-1/3\\ y=-2\\ z=-1-2\sqrt{3}\end{cases}$ ou $\begin{cases}x=-1/3\\ y=-1\\ z=-1+2\sqrt{3}\end{cases}$, mais seul le second est dans le plan (P) !

1. 24. Barycentre espace, Antilles 2004 (c)

5 points

On considère le tétraèdre $ABCD$; on note I le milieu du segment $[AB]$ et J celui de $[CD]$.

1. a. Soit G_1 le barycentre du système de points pondérés $\{(A, 1)\,;(B, 1)\,;(C, -1)\,;(D, 1)\}$.

Exprimez $\overrightarrow{IG_1}$ I en fonction de $\overrightarrow{CD}$. Placez I, J et G_1 sur une figure.

b. Soit G_2 le barycentre du système de points pondérés $\{(A, 1)\,;(B, 1)\,;(D, 2)\}$. Démontrez que G_2 est le milieu du segment $[ID]$. Placez G_2.

c. Démontrez que IG_1DJ est un parallélogramme. En déduire la position de G_2 par rapport aux points G_1 et J.

2. Soit m un réel. On note G_m le barycentre du système de points $\{(A, 1)\,;(B, 1)\,;(C, m-2)\,;(D, m)\}$.

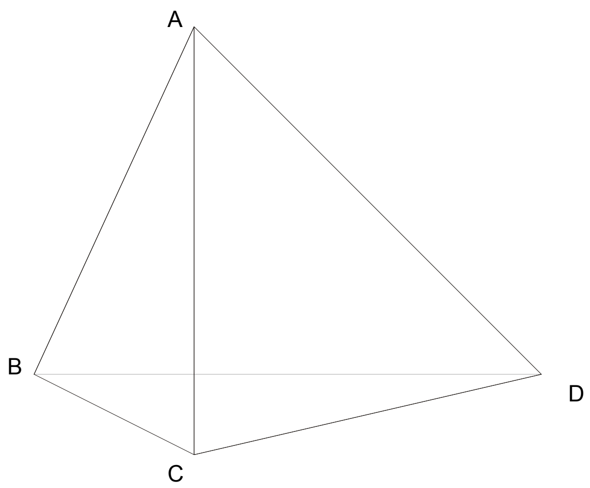
a. Précisez l'ensemble E des valeurs de m pour lesquelles le barycentre G_m existe.

Dans les questions qui suivent, on suppose que le réel m appartient à l'ensemble E.

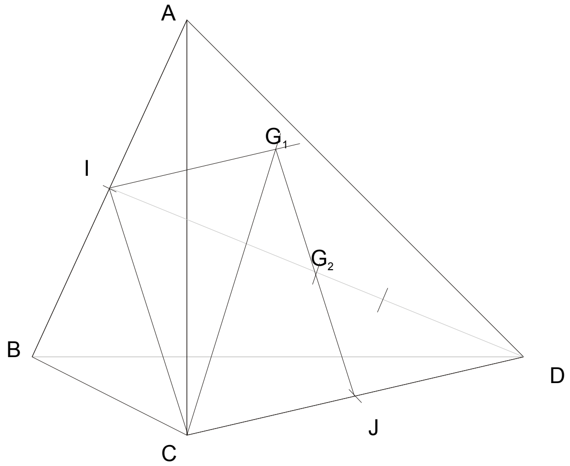
b. Démontrez que G_m appartient au plan (ICD).

c. Démontrez que le vecteur $m\overrightarrow{JG_m}$ est constant.

d. En déduire l'ensemble F des points G_m lorsque m décrit l'ensemble E.



Correction



G_1 : {(A ;1) ; (B ;1) ; (C ;–1) ; (D ;1) }

1. a. On a, quel que soit le point M :

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\,\overrightarrow{MG_1}$$

et en remplaçant M par I, on obtient :

$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=2\,\overrightarrow{IG_1}\Leftrightarrow\overrightarrow{CD}=2\,\overrightarrow{IG_1}\Leftrightarrow\overrightarrow{IG_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$.

b. G_2 : {(A ;1) ; (B ;1) ; (D ;2) }. On a quel que soit le point M du plan :

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\,\overrightarrow{MD}=4\,\overrightarrow{MG_2}\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+2\,\overrightarrow{ID}=4\,\overrightarrow{IG_2}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{ID}=2\,\overrightarrow{IG_2}\Leftrightarrow\overrightarrow{IG_2}=\frac{1}{2}\overrightarrow{ID}$.

c. D'après la question 1. a. on a $\overrightarrow{IG_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{JD}$ donc IG_1DJ est un parallélogramme.

Ses diagonales se coupent en leur milieu, or on sait que G_2 est le milieu de [ID], c'est donc aussi le milieu de [JG_1].

2. a. Le barycentre existe si et seulement si la somme des coefficients n'est pas nulle. Elle est nulle quand $1+1+m-2+m=0$, c'est-à-dire quand $m=0$.

b. G_m : {(A ;1) ; (B ;1) ; (C ; $m-2$) ; (D ; m)}. Quel que soit M du plan, on a :

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+(m-2)\overrightarrow{MC}+m\overrightarrow{MD}=2m\,\overrightarrow{MG_m}$ et en remplaçant M par I : $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+(m-2)\overrightarrow{IC}+m\overrightarrow{ID}=2m\,\overrightarrow{IG_m}$ ou encore : $(m-2)\overrightarrow{IC}+m\overrightarrow{ID}=2m\,\overrightarrow{IG_m}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{IG_m}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{ID}$, donc le point G_m est un point du plan (ICD).

c. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+(m-2)\overrightarrow{MC}+m\overrightarrow{MD}=2m\,\overrightarrow{MG_m}$; en remplaçant M par J on obtient :

$\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}+(m-2)\overrightarrow{JC}+m\overrightarrow{JD}=2m\,\overrightarrow{JG_m}$ ou encore $\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}-2\,\overrightarrow{JC}+m\,\overrightarrow{JC}+m\overrightarrow{JD}=2m\,\overrightarrow{JG_m}$. Or J est le milieu de [CD] donc on obtient enfin : $\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}-2\,\overrightarrow{JC}=2m\,\overrightarrow{JG_m}\Leftrightarrow m\,\overrightarrow{JG_m}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}\right)-\overrightarrow{JC}=\overrightarrow{JI}-\overrightarrow{JC}=\overrightarrow{JI}+\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{CI}$

d. On a $m\,\overrightarrow{JG_m}=\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{JG_1}$ d'après les questions précédentes. Ceci signifie que les points G_m se trouvent sur la droite (JG_1).

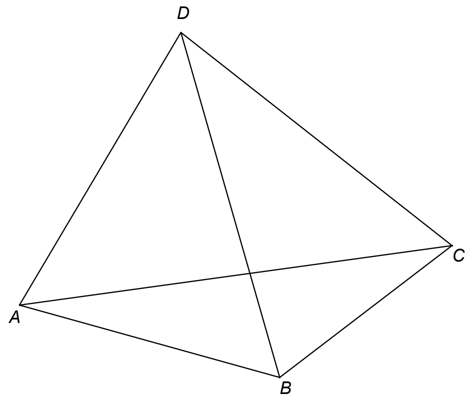
1. 25. Molécule de méthane (c)

La molécule de méthane (CH_4) a la forme d'un tétraèdre régulier de côté a dont les sommets sont occupés par des atomes d'hydrogène et le centre est occupé par l'atome de carbone. On considère par la suite que chaque atome peut être assimilé à un point.

1. Sur la figure ci-contre construire le centre de gravité G du tétraèdre $ABCD$. Montrez que la droite (GD) est orthogonale au plan (ABC). Soit H le projeté orthogonal de D (et donc de G) sur (ABC). Que peut-on dire de H dans le triangle (ABC) ? Montrez que $GH=\frac{1}{4}DH$.

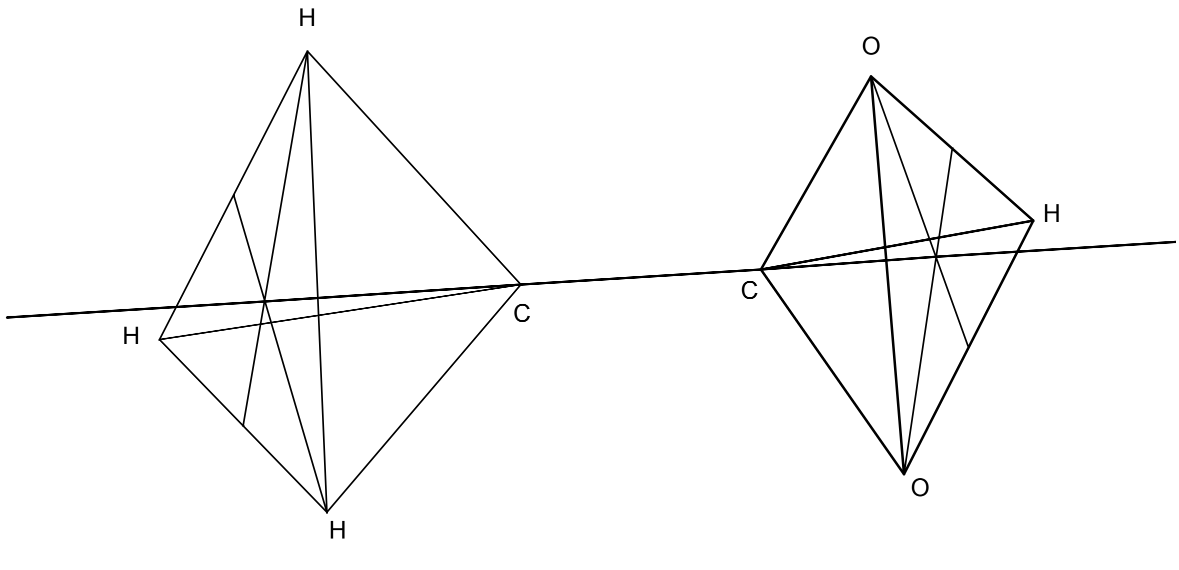
On note I le milieu de $[AB]$.

2. Que peut-on dire du triangle CID ? Calculez les distances CI, CH, GH, GC. Déduisez-en le cosinus de l'angle $\widehat{CGD}$ puis une valeur approchée en degrés de cet angle à 10^{-2} près.



3. A la suite d'une expérience de chimie amusante on a remplacé un des atomes d'hydrogène par la molécule (COOH) ce qui donne de l'acide acétique. La molécule a alors la forme de deux tétraèdres reliés par les deux atomes de carbone comme l'indique le schéma joint.

Sachant que l'atome de carbone a pour masse 12, celui d'oxygène 16 et celui d'hydrogène 1 construire le centre de gravité de la molécule (CH_3COOH) sur la figure suivante (les lettres représentent les divers atomes).

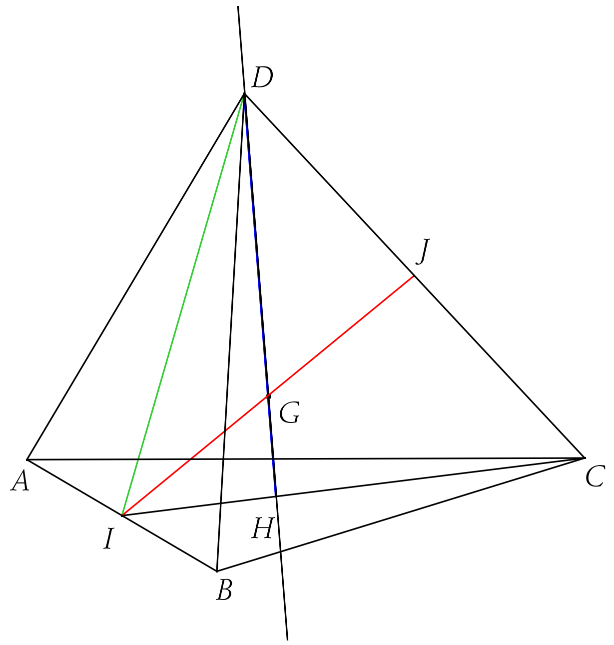


Correction

1. Pour construire le centre de gravité G du tétraèdre $ABCD$ on construit le barycentre de $\{(A\,;1), (B\,;1), (C\,;1), (D\,;1)\}$. Par ailleurs G est tel que $GA = GD = GB = GC$ et appartient aux plans médiateurs de $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$; ces trois plans sont perpendiculaires respectivement à (AB), (BC) et (AC), l'intersection de ces trois plans est la droite (GD) qui est donc perpendiculaire au plan (ABC).

H est à l'intersection des médiatrices dans le triangle (ABC) qui est équilatéral ; c'est le centre de ce triangle.

En prenant le barycentre H de $\{(A\,;1), (B\,;1), (C\,;1)\}$, on a G barycentre de $\{(H\,;3), (D\,;1)\}$ et donc $\overrightarrow{HG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{HD}$, soit $GH=\frac{1}{4}DH$.



2. CID est isocèle et $CI = ID$. Comme les triangles ABC, CBD, etc. sont équilatéraux, $CI = ID = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

H est le centre de gravité de ABC donc $CH = \dfrac{2}{3}a\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

DHC est rectangle en H donc $CH^2 + DH^2 = DC^2 \Leftrightarrow DH^2 = a^2 - a^2\dfrac{3}{9} = a^2\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow DH = a\dfrac{\sqrt{6}}{3}$;

on en tire $GH = \dfrac{1}{4}DH = a\dfrac{\sqrt{6}}{12}$; enfin $GC = GD = \dfrac{3}{4}DH = a\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

Avec Al-Kashi : $\cos\widehat{CGD} = \dfrac{CD^2 - GC^2 - GD^2}{-2GC.GD} = \dfrac{a^2\left(1 - \frac{6}{16} - \frac{6}{16}\right)}{-2a^2\frac{6}{16}.\frac{6}{16}} = \dfrac{\frac{1}{4}}{-\frac{9}{32}} = -\dfrac{8}{9} \Rightarrow \widehat{CGD} \approx 152,73°$.

3. On construit le centre de gravité de gauche, G_1 : {(H ; 1), (H ; 1), (H ; 1), (C ; 12)} qui aura la masse 15 et celui de droite, G_2 : {(H ; 1), (O ; 16), (O ; 16), (C ; 12)} qui aura la masse 45. Le centre de gravité de la molécule sera en G tel que $\overrightarrow{G_1G} = \dfrac{45}{64}\overrightarrow{G_1G_2}$.

<u>1. 26. Lignes de niveau, Liban 2006 (c)</u>

5 points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $A(2 ; 1 ; 3)$, $B(-3 ; -1 ; 7)$ et $C(3 ; 2 ; 4)$.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Soit (d) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$.

a. Montrer que la droite (d) est orthogonale au plan (ABC).

b. Donner une équation cartésienne du plan (ABC).

3. Soit H le point commun à la droite (d) et au plan (ABC).

a. Montrer que H est le barycentre de $\{(A ; -2), (B ; -1), (C ; 2)\}$.

b. Déterminer la nature de l'ensemble Γ_1, des points M de l'espace tels que

$$\left(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=0.$$

En préciser les éléments caractéristiques.

c. Déterminer la nature de l'ensemble Γ_2, des points M de l'espace tels que $\left\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{29}$.

En préciser les éléments caractéristiques.

d. Préciser la nature et donner les éléments caractéristiques de l'intersection des ensembles Γ_1 et Γ_2.

e. Le point S (−8 ; 1 ; 3) appartient-il à l'intersection des ensembles Γ_1 et Γ_2 ?

Correction

1. A, B et C sont alignés si il existe k réel tel que $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-5\\-2\\4\end{pmatrix}$... ce qui est impossible.

2. a. Un vecteur directeur de (d) est $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$; on calcule les produits scalaires $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=-10+6+4=0$ et $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=2-3+1=0$ donc (d) est orthogonale à (ABC). .

b. $M(x,y,z)\in(ABC)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x-2\\y-1\\z-3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow 2x-3y+z-4=0$.

3. a. On remplace x, y, z dans l'équation de (ABC) par : $\begin{cases}x=-7+2t\\y=-3t\\z=4+t\end{cases}$, soit

$$2(-7+2t)-3(-3t)+(4+t)-4=0\Leftrightarrow 14t-14=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow\begin{cases}x=-7+2=-5\\y=-3\\z=4+1=5\end{cases}.$$

Le barycentre de {(A ; −2), (B ; −1), (C ; 2)} a pour coordonnées : $\begin{cases}x=\dfrac{1}{-1}(-2.2-1.(-3)+2.3)=-5\\y=\dfrac{1}{-1}(-2.1-1.(-1)+2.2)=-3\\z=\dfrac{1}{-1}(-2.3-1.7+2.4)=5\end{cases}$, c'est bien H.

b. On peut le faire avec les coordonnées ou avec le barycentre : $-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CB}$ d'où $\left(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=0\Leftrightarrow\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{CB}=0$; Γ_1 est le **plan** passant par H et orthogonal à (CB).

c. $\left\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{29}\Leftrightarrow MH=\sqrt{29}$: Γ_2 est la **sphère** de centre H, de rayon $\sqrt{29}$.

d. Comme Γ_1 contient H, l'intersection de Γ_1 et Γ_2 est le **cercle** de centre H, de rayon $\sqrt{29}$.

e. Il suffit de calculer la distance SH : $\sqrt{(-8+5)^2+(1+3)^2+(5-3)^2}=\sqrt{9+16+4}=\sqrt{29}$ donc oui.

1. 27. Homothétie (c)

Soit (γ) le cercle de centre O et de rayon R.

$[AA']$ un diamètre fixé de (γ), P le milieu de $[OA']$. Une droite δ distincte de la droite (AA') et de la perpendiculaire en P à (AA') pivote autour de P et coupe (γ) en B et C.

1. Déterminer l'ensemble E_1 des milieux M de $[BC]$ lorsque δ varie.

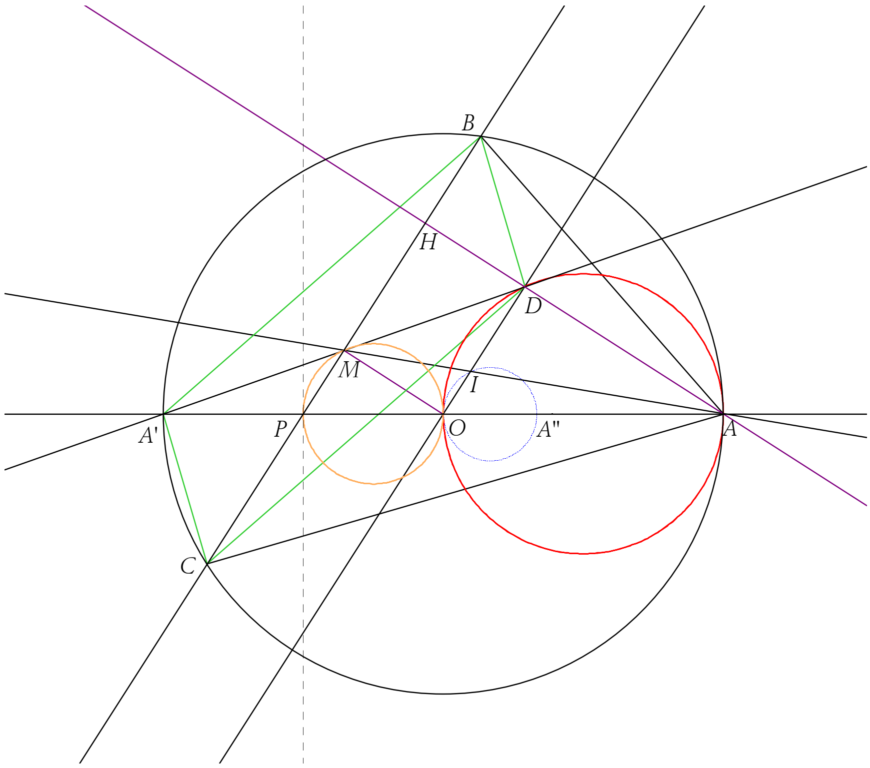
2. a. Soit H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC. La droite $(A'M)$ coupe (AH) en D. Déterminer l'ensemble E_2 des points D lorsque M décrit E_1.

b. Montrer que $A'BDC$ est un parallélogramme. En déduire que D est l'orthocentre du triangle ABC.

3. La droite (AM) coupe (OD) en I. Montrer que $2\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$. Que représente I pour le triangle ABC ? Déterminer l'ensemble E_3 des points I lorsque M décrit E_1.

Correction

La construction est facile à réaliser et donne les résultats immédiatement… y'a plus qu'à les montrer.



1. $[BC]$ est une corde du cercle γ donc (OM) est orthogonal à (BC) en M ; le triangle PMO est rectangle en M donc M décrit un cercle de diamètre $[OP]$: c'est E_1.

2. a. Soit h l'homothétie de centre A' de rapport 2 : par h P a pour image O, O a pour image A et M a pour image un point K tel que (OK) soit parallèle à (PM) et (OM) soit parallèle à (AK).

(OM) est orthogonale à (PM), donc (AK) est orthogonale à (PM), c'est la hauteur (AH). Moralité K est sur $(A'M)$ par construction et sur (AH) comme image de M, c'est donc le point D.

Puisque D est l'image de M, D décrit l'image du cercle E_1 par h, soit le cercle E_2 de diamètre $[OA]$.

b. Comme $h(M) = D$, on a M au milieu de $[A'D]$; comme M est au milieu de $[BC]$ par construction, les deux diagonales ont même milieu, $A'BDC$ est un parallélogramme.

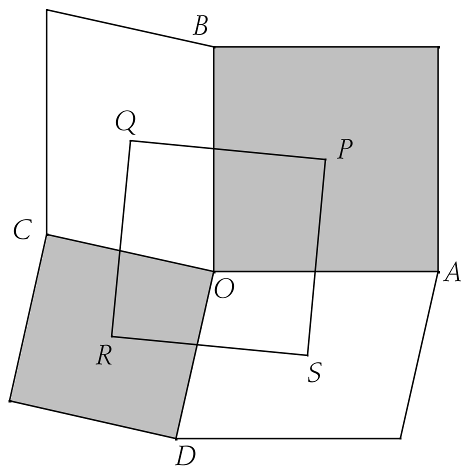
Par conséquent $(A'B)$ est parallèle à (CD) ; mais $[AA']$ est un diamètre du cercle γ donc $(A'B)$ est orthogonale à (AB) ainsi que (CD). Conclusion (CD) est une hauteur du triangle ABC. Comme D est déjà sur la hauteur (AH), c'est bien l'orthocentre.

3. On peut utiliser simplement la relation d'Euler (dans un triangle le centre de gravité G, l'orthocentre H et le centre du cercle circonscrit O sont alignés et on a $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$) : O est le centre du cercle circonscrit, D l'orthocentre et I le centre de gravité, ce qui donne immédiatement le résultat. Sinon on utilise l'homothétie h' de centre A, de rapport $\frac{2}{3}$ qui envoie P sur O, M sur I et qui donne le même résultat.

Par *h'* le cercle E_1 se transforme en cercle E_3 de diamètre $[OA'']$ où A'' est l'image de O par h'.

1. 28. EPF 2003, carré qui tourne (c)

On considère la configuration obtenue à partir de deux carrés ayant un sommet commun (en gris) et de la construction de deux parallélogrammes (en blanc). Montrer que les centres des carrés et des parallélogrammes sont les sommets d'un carré.



On pourra se placer dans le repère $(O\,;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ et prendre $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD})=\alpha$.

Correction

Pour vérifier qu'on a bien un carré il suffit de vérifier qu'on a des angles droits et que les diagonales ont même longueur.

Dans le repère $(O\,;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ avec $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD})=\alpha$ on a les coordonnées des points : A (1 ; 0), B (0 ; 1), D ($\cos\alpha$; $\sin\alpha$).

Pour C on a $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})=\alpha+\dfrac{\pi}{2}$ donc les coordonnées de C sont $\cos(\alpha-\dfrac{\pi}{2})=\sin\alpha$ et $\sin(\alpha-\dfrac{\pi}{2})=-\cos\alpha$.

On en déduit les coordonnées de P : $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$, de S : $\left(\dfrac{1+\cos\alpha}{2};\dfrac{\sin\alpha}{2}\right)$, de R : $\left(\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{2};\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{2}\right)$ et de Q : $\left(\dfrac{\sin\alpha}{2};\dfrac{1-\cos\alpha}{2}\right)$.

On vérifie qu'on a un parallélogramme en vérifiant que le milieu de $[PR]$ est également celui de $[QS]$, soit le point K $\left(\dfrac{1+\cos\alpha+\sin\alpha}{2};\dfrac{1+\sin\alpha-\cos\alpha}{2}\right)$.

Pour simplifier les calculs dans la suite on multiplie tout par 2 ce qui ne changera rien au résultat final.

$2\overrightarrow{PR}=\begin{pmatrix}\cos\alpha+\sin\alpha-1\\ \sin\alpha-\cos\alpha-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$, $2\overrightarrow{QS}=\begin{pmatrix}1+\cos\alpha-\sin\alpha\\ \sin\alpha-1+\cos\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-v\\ u\end{pmatrix}$; en fait ici lorsqu'on va calculer les longueurs $2PR$ et $2QS$ les termes seront identiques et vaudront $\sqrt{u^2+v^2}$. Il est donc inutile de faire le calcul ; de même on a $2\overrightarrow{PR}.2\overrightarrow{QS}=-uv+uv=0$. En fait ceci suffit : on a un losange dont les diagonales ont même longueur, c'est un carré.

1. 29. Le théorème de Napoléon 2 (c)

Soit ABC un triangle dont les trois angles sont aigus.

On construit à l'extérieur du triangle ABC les triangles équilatéraux BCA', CAB' et ABC'. On appelle I, J et K, respectivement, les centres des triangles BCA', CAB' et ABC'.

Le triangle IJK est équilatéral.

1. On démontre d'abord que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en un point F (point de Fermat-Torricelli).

Par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$, B' a pour image A et B a pour image A'. La rotation conservant la distance on a donc $AA' = BB'$ et l'image de la droite (AA') est (BB') : elles sont sécantes et forment un angle de même mesure que celui de la rotation, soit $\frac{\pi}{3}$.

On appelle F le point d'intersection des droites (AA') et (BB') ; on a donc $\widehat{AFB} = \frac{2\pi}{3}$, $\widehat{B'CA} = \frac{\pi}{3}$ et $\widehat{B'FA} = \frac{\pi}{3}$.

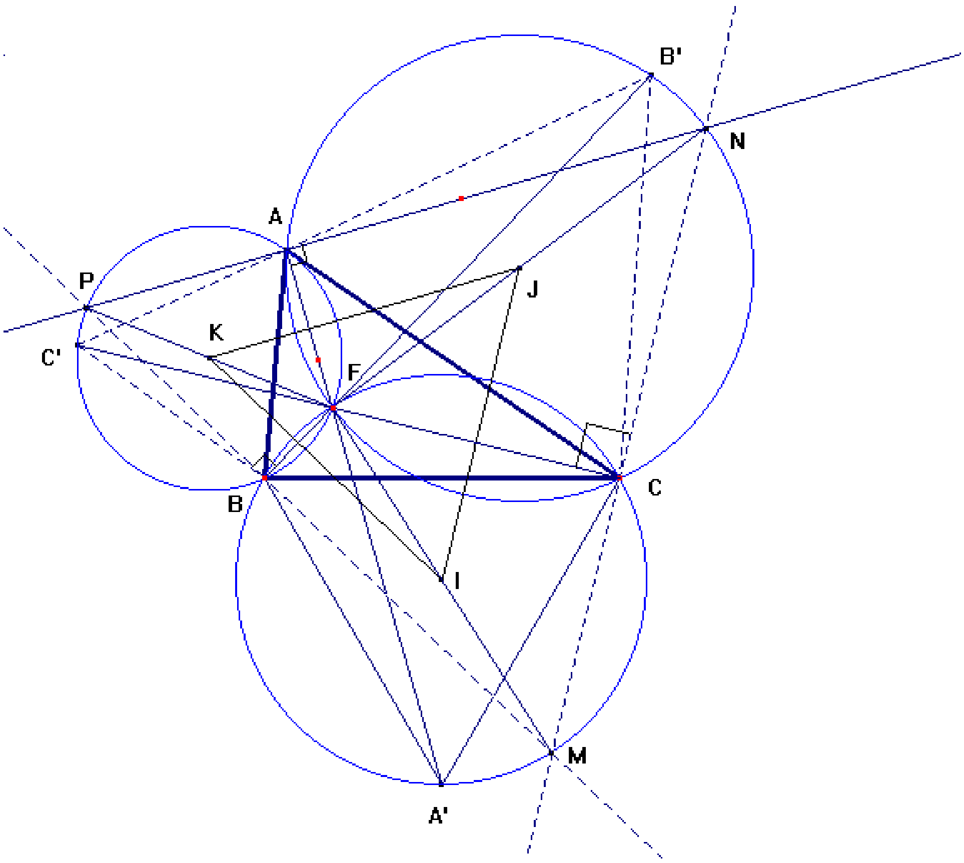
On en déduit que les quatre points A, B', C et F sont cocycliques et appartiennent au cercle Γ_2 circonscrit au triangle $AB'C$ qui a pour centre J.
De même les quatre points A, F, B et C' sont cocycliques et appartiennent au cercle Γ_3 circonscrit au triangle ABC' qui a pour centre K.
L'angle $\widehat{CFA}$ étant un angle inscrit dans le cercle Γ_2, sa mesure est supplémentaire de celle de $\widehat{AB'C}$ et vaut donc $\frac{2\pi}{3}$.

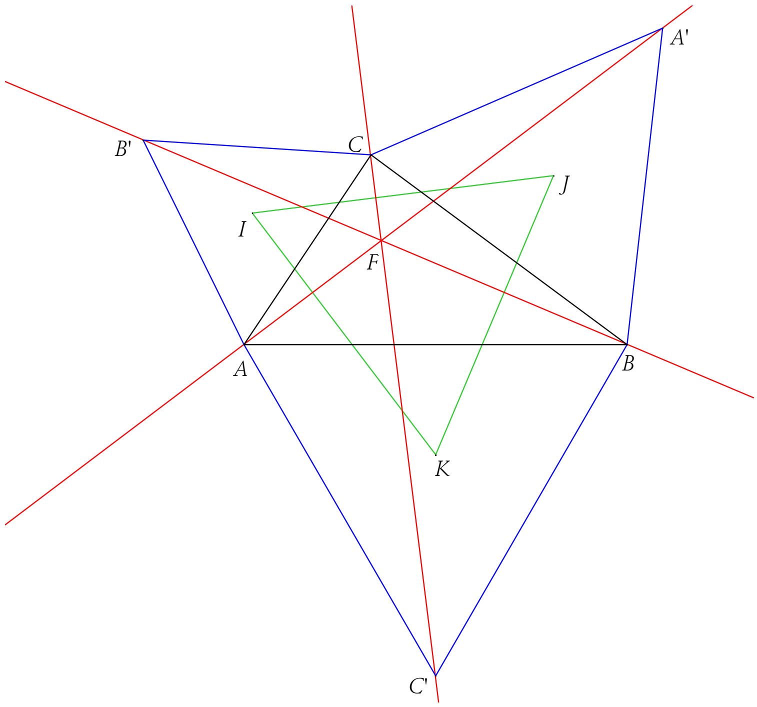
L'angle $\widehat{C'FA}$ étant un angle inscrit dans le cercle Γ_3, sa mesure est celle de $\widehat{C'BA}$, donc vaut aussi $\frac{\pi}{3}$.

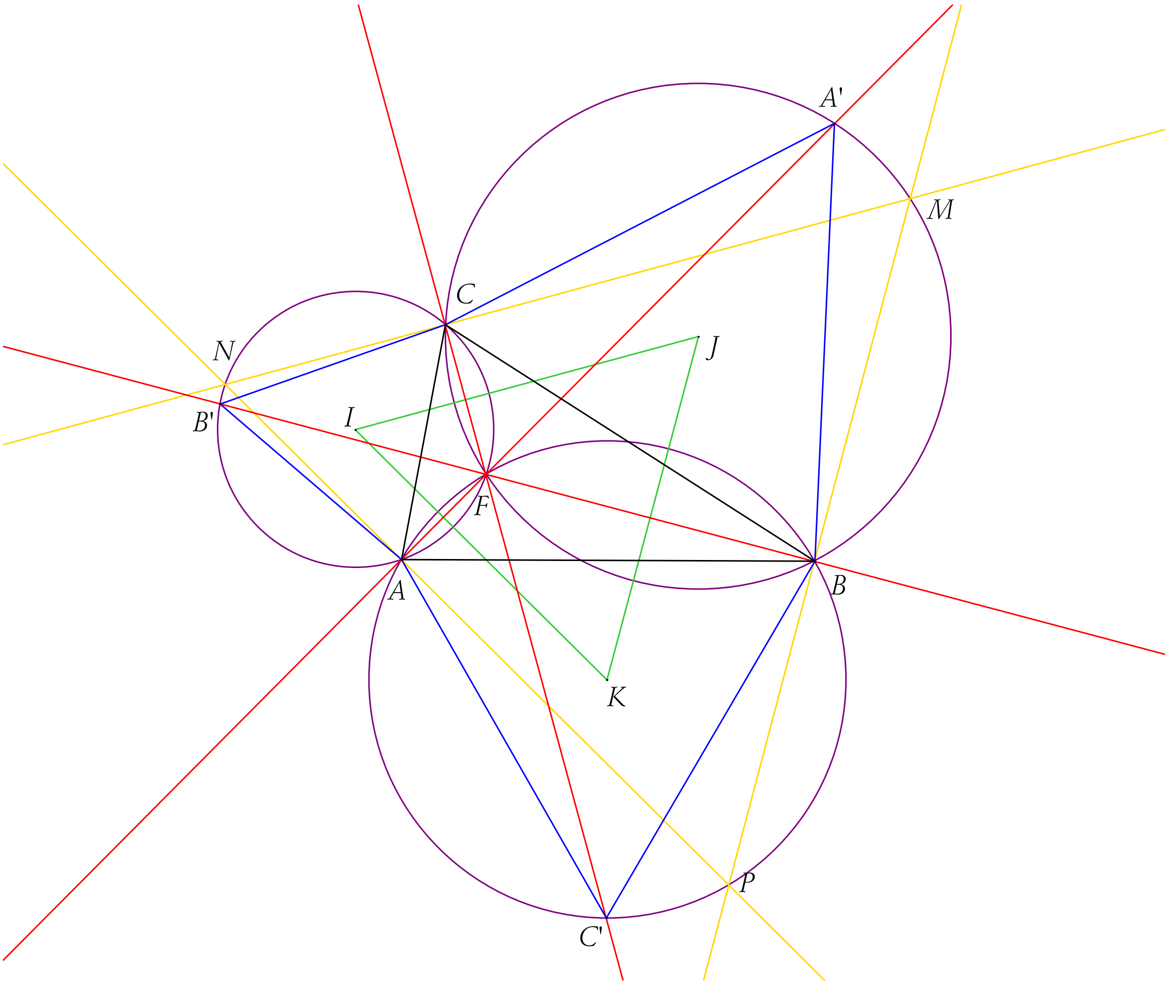
On en déduit que $\widehat{CFC'} = \widehat{CFA} + \widehat{AFC'} = \pi$, et donc que C, F et C' sont alignés : la droite (CC') passe aussi par F.
2. On construit le triangle MNP en traçant les droites perpendiculaires à (AA'), (BB') et (CC') respectivement en A, B et C.
Par construction, les triangles FCN et FAN sont rectangles d'hypothénuse [FN] . Ils ont donc le même cercle circonscrit ; les points A et C appartiennent à ce cercle de diamètre [FN], qui n'est autre que le cercle Γ_2, puisque ce cercle contient A, C et F. Les points A, C, F, B' et N sont cocycliques . On en déduit que $\widehat{ANC} = \widehat{AB'C} = \frac{\pi}{3}$.

Il en est de même pour P qui appartient donc à Γ_3, et M qui appartient à Γ_1. Donc $\widehat{BMP} = \frac{\pi}{3}$ et $\widehat{CMB} = \frac{\pi}{3}$. Finalement le triangle MNP est équilatéral.

3. Une homothétie pour conclure.
Le cercle de diamètre [FN] est le cercle Γ_2, donc son centre est J. L'homothétie h de centre F et de rapport $\frac{1}{2}$, transforme donc N en J. De même cette homothétie transforme M en I et P en K.
Le triangle MNP étant équilatéral, son image par h, soit IJK, est aussi un triangle équilatéral.


B'
N
A
P
J
K
C'
F
C
B
I
M
A'


A'
B'
C
J
I
F
A
B
K
C'



Avec les complexes :

On choisit un repère de sorte que $A(0)$, $B(1)$ et $C(u)$.

1. Affixes de A', B' et C'.

2. Affixes des isobarycentres I, J, K de (A, C, B'), (B, C, A') et (C, A, B').

3. Montrer que IJK est équilatéral.

4. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles ACB', BCA' et CAB' sont sécants en F dont on précisera l'affixe.

5. Montrer que les symétriques respectifs de F par rapport à I, J et K forment un triangle équilatéral. Montrer qu'il existe une homothétie dont on précisera le rapport qui envoie IJK sur NMP.