FONCTIONS PRIMITIVES

I) FONCTION PRIMITIVE D'UNE FONCTION

1) Activités : **Activité1**

1) Déterminer une fonction F qui admet pour fonction dérivée la fonction : $f(x)=x^2+2x+3$
2) existe-t-il une autre fonction G tel que : $(\forall x\in\mathbb{R});G'(x)=f(x)$?
3)combien Ya t'ils de onction H tel que : $(\forall x\in\mathbb{R});H'(x)=f(x)$?
et donner une expression de toutes les fonctions primitives de h

Remarques : 1) la fonction F tel que :

$F(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+3x$ Est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

Et on a $(\forall x\in\mathbb{R});F'(x)=f(x)$

On dira que : F est une primitive de f
2) Soit G une fonction définie sur

$G(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+3x+2$ on a aussi : G est dérivable

sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x\in\mathbb{R});G'(x)=f(x)$

G est aussi une primitive de f
3)toute fonction H de la forme :

$H(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+3x+k$ avec $k\in\mathbb{R}$ aussi une primitive de f

Activité2 : Soient F une fonction primitive de la fonction f sur l'intervalle I c'est-à-dire $(\forall x\in I)(F'(x)=f(x))$
et G une fonction primitive de la fonction g sur l'intervalle I, α et β deux réels.
1- Montrer que $(\alpha F+\beta G)$ est une fonction primitive de la fonction $(\alpha f+\beta g)$ sur I.
2- Soient F_1 et F_2 deux fonctions primitives de la fonction f sur l'intervalle I ; Montrer que : $(\forall x\in I)(F_2(x)=F_1(x)+\lambda)$
où λ est un réel quelconque.
3- Démontrer que si f admet une fonction primitive sur I et $x_0\in I$; alors il existe une unique fonction F_0 fonction Primitive de f telle que

$F_0(x_0)=y_0$ où y_0 un réel quelconque.

2) Définition et propriétés

Définition : Soit f une fonction définir sur un intervalle I ; On dit que la fonction F est une fonction primitive de la fonction f sur l'intervalle I si :1)F est dérivable sur I
2) $(\forall x\in I)(F'(x)=f(x))$

Théorème :(admis)
Si f est continue sur I alors f admet une fonction primitive sur I

Remarque : La continuité dans le théorème précédent est une condition suffisante qui n'est pas nécessaire.

Propriété : Si f admet une fonction primitive F sur I alors toutes les fonctions primitives de f sur I s'écrivent de la : forme :$F+\lambda$ où λ est un réel.

Propriété : Si F_1 et F_2 sont deux fonction primitive d'une fonction f sur I alors :
$(\forall x\in I)(F_2(x)=F_1(x)+\lambda)$ où $\lambda\in\mathbb{R}$

Exemple : Soit la fonction f définie par :
$f(x)=2x+1$ si $x\leq 1$
$f(x)=2x-1$ si $x>1$
Montrer que la fonction f n'admet pas de primitive Sur $\mathbb{R}$

Solution : On remarque que f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$; (elle n'est pas continue en 1)
en effet : $f(1)=3$ et $\lim_{x\to1^+}f(x)=1\neq f(1)$

$F_1(x)=x^2+x+k_1$ est une fonction primitive de la fonction f sur $]-\infty,1]$.

$F_2(x)=x^2-x+k_2$ est une fonction primitive de la fonction f sur $]1,+\infty[$.
Si f admet une primitive F sur $\mathbb{R}$ alors ils existent k_1 et k_2 tels que :

$$\begin{cases} F_1(x) = x^2 + x + k_1 ; si...x \leq 1 \\ F_2(x) = x^2 - x + k_2 ; si...x \succ 1 \end{cases}$$

et que F soit dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$(\forall x \in \mathbb{R}); F'(x) = f(x)$

On a F est dérivable sur$]-\infty, 1[$
et $(\forall x \in]-\infty, 1[)(F'(x) = f(x))$
et F est dérivable sur $]1, +\infty[$
et $(\forall x \in]1, +\infty[)(F'(x) = f(x))$
Le problème il faut déterminer (s'ils existent)

k_1 et k_2 dans $\mathbb{R}$ pour que F soit dérivable en 1 et

que :$F'(1) = f(1) = 3$.

On a $F(1) = 2 + k_1$

D'autre part pour que f soit dérivable en 1, il faut qu'elle soit continue en 1, ce qui implique

$\lim_{x\to 1^+} F(x) = \lim_{x\to 1^-} F(x) = F(1)$

On en déduit que $2 + k_1 = k_2$ d'autre part :

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{F(x) - F(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 - x + k_2 - 2 - k_1}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 - x - 2 + k_2 - k_1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 - x - 2 + 2 + k_1 - k_1}{x-1}$$

Car : $2 + k_1 = k_2$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 - x}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} x = 1 = F'_d(1)$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{F(x) - F(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 + x + k_1 - 2 - k_1}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 - x - 2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} x + 2 = 3 = F'_g(1)$$

Donc pour tous réels k_1 et k_2 ; $F'_d(1) \neq F'_g(1)$

D'où F n'existe pas et par suite f n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$

Propriété : Si f admet une fonction primitive sur I et $x_0 \in I$; alors il existe une unique fonction F_0 fonction Primitive de f telle que $F_0(x_0) = y_0$ où y_0 un réel quelconque.

Exemple : Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 2x^2 + x + 1 + \frac{1}{x^2}$

1)Déterminer les fonctions primitives de la fonction f sur $]0; +\infty[$

2)Déterminer la fonction primitive de la fonction f sur $]0; +\infty[$ tel que : $F(1) = 3$

Solution :1) $f(x) = 2x^2 + x + 1 + \frac{1}{x^2}$

Donc : $F(x) = 2 \times \frac{1}{3} x^{2+1} + \frac{1}{2} x^{1+1} + 1x - \frac{1}{x^2} + k$

Donc : $F(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{x} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

2) $F(1) = 3 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \times 1^3 + \frac{1}{2} \times 1^2 + 1 - \frac{1}{1} + k = 3$

$F(1) = 3 \Leftrightarrow \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 1 - 1 + k = 3 \Leftrightarrow \frac{7}{6} + k = 3 \Leftrightarrow k = \frac{11}{6}$

Donc : la fonction primitive de la fonction f sur $]0; +\infty[$ tel que : $F(1) = 3$ est :

$F(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{x} + \frac{11}{6}$

Propriété : Si F est une fonction primitive de la fonction f sur l'intervalle I et G une fonction primitive de la fonction g sur l'intervalle I et α un réel alors :
1) $(F + G)$ est une fonction primitive de la fonction $(f + g)$ sur I
2) (αF) est une fonction primitive de la fonction (αf) sur I

3) Tableau des fonctions primitives usuelles.

La fonction	Sa fonction primitive
$\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x + c$
$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}}$
$x^r \quad (r \in \mathbb{Q}/\{-1\})$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1} + c$
$sin(ax + b)$	$\frac{-1}{a}cos(ax + b) + c$
$cos(ax + b)$	$\frac{1}{a}sin(ax + b) + c$

4) Opérations sur les fonctions primitives.

Les seules opérations sur les fonctions primitives sont : la somme et le produit par un réel. Mais grâce au tableau des opérations sur les fonctions dérivées on peut en déduire :

La fonction	Sa fonction primitive
$u'+v'$	$u+v+C^{te}$
$\alpha u'$	$\alpha u+C^{te}$
$u'u^n\ (n\in\mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+C^{te}$
$\frac{u'}{u^2}$	$\frac{-1}{u}+C^{te}$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}+C^{te}$
$u'\sqrt[n]{u}\ \ (n\in\mathbb{N}^*)$	$\frac{n}{n+1}\ \sqrt[n]{u^{n+1}}+C^{te}$
$u'u^r\ (r\in\mathbb{Q}/\{-1\})$	$\frac{1}{r+1}u^{r+1}+C^{te}$
$u'\times v'ou$	$vou+C^{te}$

La ligne en couleur gaune est une généralisation des 4 lignes précédentes.

5) Application :

Exercice1 (situation directe): Déterminer une fonction primitive des fonctions suivantes :

1) $f(x)=5x^4+3x+1$ 2) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\cos x+\sin x-1$

3) $f(x)=\sin x+x\cos x$ 4) $f(x)=(2x-1)^3$

5) $f(x)=\frac{x}{\left(x^2-1\right)^2}$ 6) $f(x)=5x\sqrt[3]{3x^2+1}$

7) $f(x)=\frac{4x+1}{\left(2x^2+x\right)^4}$ 8) $f(x)=7x\cos\left(\pi x^2+3\right)$

Solutions : 1) $f(x)=5x^4+3x+1$

$F(x)=5\times\frac{1}{5}x^5+3\times\frac{1}{2}x^2+1x+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

2) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\cos x+\sin x-1$

$F(x)=2\sqrt{x}+\sin x-\cos x-x+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

3) $f(x)=\sin x+x\cos x=x'\sin x+x(\sin x)'$

Donc : $F(x)=x\times\sin x+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

4) $f(x)=(2x-1)^3=\frac{1}{2}(2x-1)'(2x-1)^3$

$F(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3+1}(2x-1)^{3+1}+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

$F(x)=\frac{1}{8}(2x-1)^4+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

5) $f(x)=-\frac{x}{\left(x^2-1\right)^2}$

on doit remarquer que : $f(x)=-\frac{\left(x^2-1\right)'}{\left(x^2-1\right)^2}$

et par suite : $F(x)=\frac{1}{x^2-1}+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

6) $f(x)=5x\sqrt[3]{3x^2+1}$ On doit remarquer que :

la fonction $u(x)=3x^2+1$ donne $u'(x)=6x$ et par suite : $f(x)=\frac{5}{6}u'(x)\sqrt[3]{u(x)}$ on utilisant le tableau

(c'est de la forme : $u'\sqrt[n]{u}$ $(n=3)$)

Donc les fonctions primitives de f s'écrivent sous la forme : $F(x)=\frac{5}{6}\frac{3}{4}\sqrt[3]{u^4(x)}+k$

$F(x)=\frac{5}{8}\sqrt[3]{\left(3x^2+1\right)^4}+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

7) Déterminons une fonction primitive de :

$f(x)=\frac{4x+1}{\left(2x^2+x\right)^4}$ On doit remarquer que :

la fonction $u(x)=2x^2+x$ donne $u'(x)=4x+1$

et par suite : $f(x)=\frac{u'(x)}{u^4(x)}=u'(x)u^{-4}(x)$

En utilisant le tableau on a :

(c'est de la forme : $u'u^n$ $(n=-4)$)

Donc les fonctions primitives de f s'écrivent sous la forme : $F(x)=\frac{1}{-4+1}u^{-4+1}(x)+k$

$F(x)=-\frac{1}{3}\left(2x^2+x\right)^{-3}+k=-\frac{1}{3}\frac{1}{\left(2x^2+x\right)^3}+k$

8) $f(x)=7x\cos\left(\pi x^2+3\right)$ On doit remarquer que :

la fonction $u(x)=\pi x^2+3$ donne $u'(x)=2\pi x$

et par suite : $f(x)=\frac{7}{2\pi}u'(x)\cos(u(x))$

(c'est de la forme : $u'\times(v'\circ u)$)

Donc les fonctions primitives de f s'écrivent sous la forme : $F(x)=\frac{7}{2\pi}\sin(\pi x^2+3)+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

Exercice2 :Déterminer une fonction primitive de fonction suivante : $f(x)=\frac{6}{4x^2+4x+1}$

Solutions : A remarquer que

$f(x)=\frac{6}{(2x+1)^2}=(-3)\left(-\frac{(2x+1)'}{(2x+1)^2}\right)$ (C'est de la forme: $-\frac{u'}{u^2}$)

Donc les fonctions primitives de la fonction f sont les fonctions : $F(x)=\frac{-3}{2x+1}+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

<u>Remarque :</u> On peut utiliser cette méthode pour toutes les fonctions de la formes :

$f(x)=\frac{\alpha}{ax^2+bx+c}$ où le discriminant Δ est nul

Exercice3 : Déterminer les fonctions primitives des fonctions :

1) $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt[3]{2+\cos x}}$

2) $f(x)=2x\sin x+x^2\cos x$ 3) $f(x)=(4x+5)^2$

4) $f(x)=2\sqrt{2x+1}$ 5) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

6) $f(x)=x\sqrt{x^2+1}$ 7) $f(x)=\tan^2 x$

8) $f(x)=\cos^4 x$ (utiliser : cos^2x =(1+$cos2x$)/2))

9) $f(x)=\sin^3 x$ (Remarquer que : $sin^3\, x = sinx\; sin^2x$)

Solutions : 1) il faut faire des transformations : a remarquer que :

1) $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt[3]{2+\cos x}}=-(2+\cos x)'(2+\cos x)^{-\frac{1}{3}}$

(c'est de la forme : $u'u^n$)

Donc les fonctions primitives de f s'écrivent sous la forme :

$F(x)=-\frac{1}{-\frac{1}{3}+1}(2+\cos x)^{-\frac{1}{3}+1}+k=-\frac{3}{2}(2+\cos x)^{\frac{2}{3}}+k$

$F(x)=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(2+\cos x)^2}+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

2) $f(x)=2x\sin x+x^2\cos x=(x^2)'\sin x+x^2(\sin x)'$

Donc : $F(x)=x^2\times\sin x+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

3) $f(x)=(4x+5)^2=\frac{1}{4}(4x+5)'(4x+5)^2$

$F(x)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2+1}(4x+5)^{2+1}+k$

$F(x)=\frac{1}{12}(4x+5)^3+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

4) $f(x)=2\sqrt{2x+1}=(2x+1)'(2x+1)^{\frac{1}{2}}$

Donc : $F(x)=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(2x+1)^{\frac{1}{2}+1}=\frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}$

$F(x)=\frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\left(\sqrt{2x+1}\right)^3+k$

5) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}$

$F(x)=\sqrt{x^2+1}+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

6) $f(x)=x\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{2}(x^2+1)'(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$

$F(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(x^2+1)^{\frac{1}{2}+1}+k=\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+k$

$F(x)=\frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

7) $f(x)=\tan^2 x=(1+\tan^2 x)-1$

$F(x)=\tan x-x+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

8) $f(x)=\cos^4 x=\left(\cos^2 x\right)^2=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2$)

$$f(x)=\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right)=\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)$$

$$f(x)=\frac{1}{8}(3+4\cos 2x+\cos 4x)=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$$

$F(x)=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

9) $f(x)=\sin^3 x=\sin x\times\sin^2 x=\sin x\times\left(1-\cos^2 x\right)$

$$f(x)=\sin x-\sin x\times\cos^2 x=\sin x+(\cos x)'\times\cos^2 x$$

$F(x)=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

Exercice4: Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$

par : $f(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

1)Déterminer les réels a et b tels que :

$$f(x)=a+\frac{b}{(x+1)^2}\qquad \forall x\in[0;+\infty[$$

2)Déterminer la fonction primitive F de la fonction f sur $[0;+\infty[$ tel que : $F(1)=\frac{5}{2}$

Solution :1)

$$f(x)=a+\frac{b}{(x+1)^2}=\frac{a(x+1)^2+b}{(x+1)^2}=\frac{ax^2+2ax+a+b}{(x+1)^2}$$

Donc : $\begin{cases}a=1\\2a=2\\a+b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\a=1\\b=-1\end{cases}$ donc : $f(x)=1-\frac{1}{(x+1)^2}$

2) $f(x)=1-\frac{(x+1)'}{(x+1)^2}$ Donc : $F(x)=x+\frac{1}{x+1}+k$

$k\in\mathbb{R}$ $\forall x\in[0;+\infty[$

Exercice5: Soit la fonction f définie sur $[1;+\infty[$

par : $f(x)=x\sqrt{x-1}$

1)montrer que : $f(x)=\sqrt{(x-1)^3}+\sqrt{x-1}$ $\forall x\in[1;+\infty[$

2)Déterminer la fonction primitive F de la fonction f sur $[1;+\infty[$ tel que : $F(2)=1$

Solution :1) $\forall x\in[1;+\infty[$

$$\sqrt{(x-1)^3}+\sqrt{x-1}=\sqrt{(x-1)^2}\times\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}=|x-1|\times\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}$$

On a : $x\in[1;+\infty[$ donc : $x\geq 1$ donc : $x-1\geq 0$

donc :

$$\sqrt{(x-1)^3}+\sqrt{x-1}=(x-1)\times\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}=x\sqrt{x-1}-1\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}=x\sqrt{x-1}$$

2) $f(x)=\sqrt{(x-1)^3}+\sqrt{x-1}$ $\forall x\in[1;+\infty[$

$$f(x)=\left((x-1)^3\right)^{\frac{1}{2}}+(x-1)^{\frac{1}{2}}=(x-1)^{\frac{3}{2}}+(x-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$f(x)=(x-1)'(x-1)^{\frac{3}{2}}+(x-1)'(x-1)^{\frac{1}{2}}$$

Donc : $F(x)=\frac{1}{\frac{3}{2}+1}(x-1)^{\frac{3}{2}+1}+\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(x-1)^{\frac{1}{2}+1}+k$

$$F(x)=\frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+k$$

$F(x)=\frac{2}{5}\left(\sqrt{x-1}\right)^5+\frac{2}{3}\left(\sqrt{x-1}\right)^3+k$ $\quad k\in\mathbb{R}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien