TD : **Exercices d'applications et de réflexion avec solutions**

PROF: ATMANI NAJIB 2BAC BIOF

TD avec solutions : FONCTIONS PRIMITIVES

Exercice1 : Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=2x^2+x+1+\frac{1}{x^2}$

1)Déterminer les fonctions primitives de la fonction f sur $]0;+\infty[$

2)Déterminer la fonction primitive de la fonction f sur $]0;+\infty[$ tel que : $F(1)=3$

Solution :1) $f(x)=2x^2+x+1+\frac{1}{x^2}$

Donc : $F(x)=2\times\frac{1}{3}x^{2+1}+\frac{1}{2}x^{1+1}+1x-\frac{1}{x^2}+k$

Donc : $F(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{x}+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

2) $F(1)=3\Leftrightarrow\frac{2}{3}\times1^3+\frac{1}{2}\times1^2+1-\frac{1}{1}+k=3$

$F(1)=3\Leftrightarrow\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+1-1+k=3\Leftrightarrow\frac{7}{6}+k=3\Leftrightarrow k=\frac{11}{6}$

Donc : la fonction primitive de la fonction f sur $]0;+\infty[$ tel que : $F(1)=3$ est :

$F(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{x}+\frac{11}{6}$

Exercice2 : (situation directe): Déterminer une fonction primitive des fonctions suivantes :

1) $f(x)=5x^4+3x+1$ 2) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\cos x+\sin x-1$

3) $f(x)=\sin x+x\cos x$ 4) $f(x)=(2x-1)^3$

5) $f(x)=\frac{x}{\left(x^2-1\right)^2}$ 6) $f(x)=5x\sqrt[3]{3x^2+1}$

7) $f(x)=\frac{4x+1}{\left(2x^2+x\right)^4}$ 8) $f(x)=7x\cos\left(\pi x^2+3\right)$

Solutions : 1) $f(x)=5x^4+3x+1$

$F(x)=5\times\frac{1}{5}x^5+3\times\frac{1}{2}x^2+1x+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

2) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\cos x+\sin x-1$

$F(x)=2\sqrt{x}+\sin x-\cos x-x+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

3) $f(x)=\sin x+x\cos x=x'\sin x+x(\sin x)'$

Donc : $F(x)=x\times\sin x+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

4) $f(x)=(2x-1)^3=\frac{1}{2}(2x-1)'(2x-1)^3$

$F(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3+1}(2x-1)^{3+1}+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

$F(x)=\frac{1}{8}(2x-1)^4+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

5) $f(x)=-\frac{x}{\left(x^2-1\right)^2}$

on doit remarquer que : $f(x)=-\frac{\left(x^2-1\right)'}{\left(x^2-1\right)^2}$

et par suite : $F(x)=\frac{1}{x^2-1}+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

6) $f(x)=5x\sqrt[3]{3x^2+1}$ On doit remarquer que :

la fonction $u(x)=3x^2+1$ donne $u'(x)=6x$ et par suite : $f(x)=\frac{5}{6}u'(x)\sqrt[3]{u(x)}$ on utilisant le tableau on a :

(c'est de la forme : $u'\sqrt[n]{u}$ (n = 3))

Donc les fonctions primitives de f s'écrivent sous la forme : $F(x)=\frac{5}{6}\frac{3}{4}\sqrt[3]{u^4(x)}+k$

$F(x)=\frac{5}{8}\sqrt[3]{\left(3x^2+1\right)^4}+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

7) Déterminons une fonction primitive de :

$f(x)=\dfrac{4x+1}{\left(2x^2+x\right)^4}$ On doit remarquer que :

la fonction $u(x)=2x^2+x$ donne $u'(x)=4x+1$

et par suite : $f(x)=\dfrac{u'(x)}{u^4(x)}=u'(x)u^{-4}(x)$

on utilisant le tableau on a :

(c'est de la forme : $u'u^n$ (n = -4))

Donc les fonctions primitives de f s'écrivent sous la forme : $F(x)=\dfrac{1}{-4+1}u^{-4+1}(x)+k$

$$F(x)=-\frac{1}{3}\left(2x^2+x\right)^{-3}+k=-\frac{1}{3}\frac{1}{\left(2x^2+x\right)^3}+k$$

8) $f(x)=7x\cos\left(\pi x^2+3\right)$

On doit remarquer que :

la fonction $u(x)=\pi x^2+3$ donne $u'(x)=2\pi x$

et par suite : $f(x)=\dfrac{7}{2\pi}u'(x)\cos\left(u(x)\right)$

(c'est de la forme : $u'\times\left(v'\circ u\right)$)

Donc les fonctions primitives de f s'écrivent sous la forme : $F(x)=\dfrac{7}{2\pi}\sin\left(\pi x^2+3\right)+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

Exercice3 : Déterminer une fonction primitive de fonctions suivante : $f(x)=\dfrac{2}{4x^2+4x+1}$

Solutions : A remarquer que

$f(x)=\dfrac{6}{(2x+1)^2}=(-3)\left(-\dfrac{(2x+1)'}{(2x+1)^2}\right)$ (C'est de la forme: $-\dfrac{u'}{u^2}$)

Donc les fonctions primitives de la fonction f sont les fonctions : $F(x)=\dfrac{-3}{2x+1}+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

Remarque : On peut utiliser cette méthode pour toutes les fonctions de la formes :

$f(x)=\dfrac{\alpha}{ax^2+bx+c}$ où le discriminant Δ est nul

Exercice4 : Soit la fonction f définie par :

$f(x) = 2x + 1$ si $x \le 1$

$f(x) = 2x - 1$ si $x > 1$

Montrer que la fonction f n'admet pas de primitive Sur $\mathbb{R}$

Solution : On remarque que f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$; (elle n'est pas continue en 1)

en effet : $f(1)=3$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=1\neq f(1)$

$F_1(x)=x^2+x+k_1$ est une fonction primitive de la fonction f sur $]-\infty, 1]$.

$F_2(x)=x^2-x+k_2$ est une fonction primitive de la fonction f sur $]1,+\infty[$.

Si f admet une primitive F sur $\mathbb{R}$ alors ils existent k_1 et k_2 tels que :

$$\begin{cases} F_1(x)=x^2+x+k_1;si...x\le1 \\ F_2(x)=x^2-x+k_2;si...x\succ1 \end{cases}$$

et que F soit dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$(\forall x\in\mathbb{R});F'(x)=f(x)$

On a F est dérivable sur$]-\infty, 1[$

et $(\forall x \in]-\infty, 1[)(F'(x) = f(x))$

et F est dérivable sur $]1, +\infty[$

et $(\forall x \in]1, +\infty[)(F'(x) = f(x))$

Le problème il faut déterminer (s'ils existent) k_1 et k_2 dans $\mathbb{R}$ pour que F soit dérivable en 1 et que :$F'(1) = f(1) = 3$.

On a $F(1)=2+k_1$

D'autre part pour que f soit dérivable en 1, il faut qu'elle soit continue en 1, ce qui implique

$\lim\limits_{x\to1^+}F(x)=\lim\limits_{x\to1^-}F(x)=F(1)$

On en déduit que $2+k_1=k_2$ d'autre part :

$$\lim_{x\to1^+}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-x+k_2-2-k_1}{x-1}$$

$= \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-x-2+k_2-k_1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-x-2+2+k_1-k_1}{x-1}$

Car : $2+k_1=k_2$

$= \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-x}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} x = 1 = F_d'(1)$

$\lim_{x\to 1^-} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+x+k_1-2-k_1}{x-1}$

$= \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} x+2 = 3 = F_g'(1)$

Donc pour tous réels k_1 et k_2 ; $F_d'(1) \neq F_g'(1)$

D'où F n'existe pas et par suite f n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$

Exercice5 : Déterminer les fonctions primitives des fonctions :1) $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{2+\cos x}}$

2) $f(x) = 2x\sin x + x^2\cos x$ 3) $f(x) = (4x+5)^2$

4) $f(x) = 2\sqrt{2x+1}$ 5) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

6) $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$ 7) $f(x) = \tan^2 x$

8) $f(x) = \cos^4 x$ (utiliser : cos^2x =(1+$cos2x$)/2))

9) $f(x) = \sin^3 x$ (Remarquer que : $sin^3\, x = sinx\; sin^2x$)

Solutions : 1)

$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{2+\cos x}} = -(2+\cos x)'(2+\cos x)^{-\frac{1}{3}}$

(c'est de la forme : $u'u^n$)

Donc les fonctions primitives de f s'écrivent sous la forme :

$F(x) = -\frac{1}{-\frac{1}{3}+1}(2+\cos x)^{-\frac{1}{3}+1} + k = -\frac{3}{2}(2+\cos x)^{\frac{2}{3}} + k$

$F(x) = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{(2+\cos x)^2} + k$ avec $k\in\mathbb{R}$

2) $f(x) = 2x\sin x + x^2\cos x = (x^2)'\sin x + x^2(\sin x)'$

Donc : $F(x) = x^2\times\sin x + k$ avec $k\in\mathbb{R}$

3) $f(x) = (4x+5)^2 = \frac{1}{4}(4x+5)'(4x+5)^2$

$F(x) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{2+1}(4x+5)^{2+1} + k$

$F(x) = \frac{1}{12}(4x+5)^3 + k$ avec $k\in\mathbb{R}$

4) $f(x) = 2\sqrt{2x+1} = (2x+1)'(2x+1)^{\frac{1}{2}}$

Donc : $F(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}(2x+1)^{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}$

$F(x) = \frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{2x+1}\right)^3 + k$

5) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}$

$F(x) = \sqrt{x^2+1} + k$ avec $k\in\mathbb{R}$

6) $f(x) = x\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{2}(x^2+1)'(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$

$F(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(x^2+1)^{\frac{1}{2}+1} + k = \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + k$

$F(x) = \frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3 + k$ avec $k\in\mathbb{R}$

7) $f(x) = \tan^2 x = (1+\tan^2 x) - 1$

$F(x) = \tan x - x + k$ avec $k\in\mathbb{R}$

8) $f(x) = \cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2$)

$f(x) = \frac{1}{4}(1+2\cos 2x+\cos^2 2x) = \frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)$

$f(x) = \frac{1}{8}(3+4\cos 2x+\cos 4x) = \frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$

$F(x) = \frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x + k$ avec $k\in\mathbb{R}$

9) $f(x) = \sin^3 x = \sin x\times\sin^2 x = \sin x\times(1-\cos^2 x)$

$f(x) = \sin x - \sin x\times\cos^2 x = \sin x + (\cos x)'\times\cos^2 x$

$$F(x)=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+k \quad \text{avec } k\in\mathbb{R}$$

Exercice6: Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$ 1)Déterminer les réels a et b tels que : $f(x)=a+\frac{b}{(x+1)^2}$ $\quad\forall x\in[0;+\infty[$

2)Déterminer la fonction primitive F de la fonction f sur $[0;+\infty[$ tel que : $F(1)=\frac{5}{2}$

Solution :1)

$$f(x)=a+\frac{b}{(x+1)^2}=\frac{a(x+1)^2+b}{(x+1)^2}=\frac{ax^2+2ax+a+b}{(x+1)^2}$$

Donc : $\begin{cases}a=1\\2a=2\\a+b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\a=1\\b=-1\end{cases}$ donc : $f(x)=1-\frac{1}{(x+1)^2}$

2) $f(x)=1-\frac{(x+1)'}{(x+1)^2}$ Donc : $F(x)=x+\frac{1}{x+1}+k$

$k\in\mathbb{R}\quad\forall x\in[0;+\infty[$

Exercice7: Soit la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par : $f(x)=x\sqrt{x-1}$

1)montrer que : $f(x)=\sqrt{(x-1)^3}+\sqrt{x-1}\quad\forall x\in[1;+\infty[$

2)Déterminer la fonction primitive F de la fonction f sur $[1;+\infty[$ tel que : $F(2)=1$

Solution :1) $\forall x\in[1;+\infty[$

$$\sqrt{(x-1)^3}+\sqrt{x-1}=\sqrt{(x-1)^2}\times\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}=|x-1|\times\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}$$

On a : $x\in[1;+\infty[$ donc : $x\geq1$ donc : $x-1\geq0$

donc :

$$\sqrt{(x-1)^3}+\sqrt{x-1}=(x-1)\times\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}=x\sqrt{x-1}-1\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}=x\sqrt{x-1}$$

2) $f(x)=\sqrt{(x-1)^3}+\sqrt{x-1}\quad\forall x\in[1;+\infty[$

$$f(x)=\left((x-1)^3\right)^{\frac{1}{2}}+(x-1)^{\frac{1}{2}}=(x-1)^{\frac{3}{2}}+(x-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$f(x)=(x-1)'(x-1)^{\frac{3}{2}}+(x-1)'(x-1)^{\frac{1}{2}}$$

Donc : $F(x)=\frac{1}{\frac{3}{2}+1}(x-1)^{\frac{3}{2}+1}+\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(x-1)^{\frac{1}{2}+1}+k$

$$F(x)=\frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+k$$

$$F(x)=\frac{2}{5}\left(\sqrt{x-1}\right)^5+\frac{2}{3}\left(\sqrt{x-1}\right)^3+k\qquad k\in\mathbb{R}$$

Exercice8: Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{5x^4+40x^2+20x+80}{(x^2+4)^2}$ 1)Déterminer les réels a et b et c tels que : $f(x)=\frac{ax+b}{(x^2+4)^2}+c\quad\forall x\in\mathbb{R}$

2)Déterminer la fonctions primitives F de la fonction f sur $\mathbb{R}$ tel que : $F(0)=c$

Solution :1)

$$f(x)=\frac{ax+b}{(x^2+4)^2}+c=\frac{ax+b+c(x^2+4)^2}{(x^2+4)^2}=\frac{ax+b+cx^4+8cx^2+16c}{(x^2+4)^2}$$

$f(x)=\frac{cx^4+8cx^2+ax+(b+16c)}{(x^2+4)^2}$ donc :

$\begin{cases}c=5\\8c=40\\a=20\\b+16c=80\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=5\\c=5\\a=20\\b=0\end{cases}$ donc : $f(x)=\frac{20x}{(x^2+4)^2}+5$

2) $f(x)=\frac{20x}{(x^2+4)^2}+5\Leftrightarrow f(x)=10\frac{(x^2+4)'}{(x^2+4)^2}+5$

Donc : $F(x)=-\frac{10}{x^2+4}+5x+k\qquad k\in\mathbb{R}$

$$F(0)=5\Leftrightarrow-\frac{10}{4}+k=5\Leftrightarrow k=\frac{15}{2}$$

$F(x)=-\frac{10}{x^2+4}+5x+\frac{15}{2}\ \forall x\in\mathbb{R}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron

Dit un proverbe. C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien