

**Exercice 1 :****1<sup>ère</sup> partie :**

Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = x(x-1) + \ln x$ .

- ① - a - Calculer  $g'(x)$  pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ .  
b - Etudier les variations de la fonction  $g$ .
- ② - Calculer  $g(1)$ , puis déduire le signe de  $g(x)$  sur  $]0; +\infty[$ .

**2<sup>ème</sup> partie :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = (x-1)^2 + \ln^2(x)$ .

- ① - Calculer  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$  et interpréter le résultat géométriquement.
- ② - Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ , puis étudier la branche infinie de courbe  $(\mathcal{C}_f)$  au voisinage de  $+\infty$ .
- ③ - a - Montrer que :  $\forall x \in ]0; +\infty[ : f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$ .  
b - En déduire les variations de  $f$  sur  $D_f$ .
- ④ - Tracer  $(\mathcal{C}_f)$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**3<sup>ème</sup> partie :**

Soit  $h$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $I = ]0; 1]$ .

- ① - Montrer que la fonction  $h$  admet une fonction réciproque  $h^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  à déterminer.
- ② - Tracer  $(\mathcal{C}_{h^{-1}})$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**Exercice 2 :****1<sup>ère</sup> partie :**

Soit  $f$  la fonction numérique définie par : 
$$\begin{cases} f(x) = x(\ln x)^2 + x & ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- ① - Déterminer  $D_f$ .
- ② - a - Montrer que :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x(\ln x)^2 = 0$ .  
b - En déduire que la fonction  $f$  continue à droite du point  $x_0 = 0$ .  
c - Etudier la dérivabilité de  $f$  en 0 à droite et interpréter le résultat géométriquement.
- ③ - Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , puis étudier la branche infinie de courbe  $(\mathcal{C}_f)$  au voisinage de  $+\infty$ .
- ④ - Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in D_f - \{0\}$ , et étudier les variations de la fonction  $f$ .
- ⑤ - a - Calculer  $f''(x)$  pour tout  $x \in D_f - \{0\}$ .  
b - Etudier la concavité de la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ .

⑥- a - Déterminer d'équation de la droite  $(\Delta)$  tangente à la courbe  $(\mathcal{E}_f)$  au point d'abscisse  $x_0 = 1$ .

b - Etudier les positions relatives de  $(\mathcal{E}_f)$  et la droite  $(\Delta)$ .

⑦- Tracer  $(\mathcal{E}_f)$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

⑧- a - Montrer que la fonction  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  à déterminer.

b - Montrer que  $f^{-1}$  est dérivable sur  $J$ .

c - Calculer  $(f^{-1})'(1)$ .

d - Tracer  $(\mathcal{E}_{f^{-1}})$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

### ☺ 2<sup>ème</sup> partie :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{e} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N}).$$

①- Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{1}{e} \leq u_n \leq 1$ .

②- Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.

③- Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

### 🦋 Exercice 3 :

#### ☺ 1<sup>ère</sup> partie :

Soit  $g$  la fonction définie par :  $g(x) = x - \ln x$ .

①- Déterminer  $D_g$ , puis trouver les limites de  $f$  aux bornes de  $D_g$ .

②- Calculer  $g'(x)$  pour tout  $x \in D_g$ , et étudier les variations de la fonction  $g$ .

③- En déduire que :  $(\forall x \in ]0; +\infty[) : \ln x < x$ .

#### ☺ 2<sup>ème</sup> partie :

Soit  $f$  la fonction numérique définie par : 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x + \ln x}{x - \ln x} ; x > 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

①- Déterminer  $D_f$ .

②- a - Montrer que la fonction  $f$  est continue en 0 à droite.

b - Etudier la dérivabilité de  $f$  en 0 à droite et interpréter le résultat géométriquement.

③- Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et interpréter le résultat géométriquement.

④- Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in D_f - \{0\}$ , et étudier les variations de la fonction  $f$ .

⑤- Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  tel que  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ .

⑥- Tracer  $(\mathcal{E}_f)$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . (On prends  $e \approx 2,7$  et  $\ln 2 \approx 0,7$ ).