Exercices d'applications et de réflexions avec solutions : *fonctions exponentielles*

PROF : ATMANI NAJIB

2ème BAC Sciences Physiques et Sciences de la Vie et de la Terre (2BAC PC et SVT)

FONCTIONS EXPONENTIELLES

Exercice1 : Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

$1)\exp\left(\frac{x+5}{2x+3}\right)=\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)$ $2)\exp(2x+1)\leq\exp\left(\frac{6}{x}\right)$

Solution :1) $ln(x-2)=0$

a)cette équation est définie ssi : $2x+3\neq0$ et $x-1\neq0$ donc: $x\neq-\frac{3}{2}$ et $x\neq1$ donc : $D_E=\mathbb{R}-\left\{-\frac{3}{2};1\right\}$

b) Résoudre l'équation :

$$\exp\left(\frac{x+5}{2x+3}\right)=\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)\Leftrightarrow\frac{x+5}{2x+3}=\frac{1}{x-1}$$

$$(x+5)(x-1)=2x+3\Leftrightarrow x^2+2x-8=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times(-8)\times1=4+32=36>0$$

$x_1=\frac{-2+6}{2\times1}=\frac{4}{2}=2$ et $x_1=\frac{-2-6}{2\times1}=\frac{-8}{2}=-4$

Donc : $S=\{-4;2\}$

$2)\exp(2x+1)\leq\exp\left(\frac{6}{x}\right)$

a)cette inéquation est définie ssi : $x\neq0$ donc : $D_I=\mathbb{R}^*$

$2)\exp(2x+1)\leq\exp\left(\frac{6}{x}\right)\Leftrightarrow 2x+1\leq\frac{6}{x}$

$\Leftrightarrow\frac{2x^2+x-6}{x}\leq0$

x	$-\infty$		-2		0		$3/2$		$+\infty$
$2x+x-6$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$q(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

$$S=]-\infty,-2]\cup\left]0,\frac{3}{2}\right]$$

Exercice2 : Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1) $e^{1-x}\times e^{2x}=e$ 2) $\frac{e^{2-x}}{e^{1+2x}}=e^{x-1}$

3) $e^{2x}-5e^x+6=0$ 4) $e^{x^2}\cdot\left(e^x\right)^3=\left(e^{-x}\right)^5\cdot e^{-7}$

5) $e^{2x-3}-(e+1)e^{x-2}+1\prec0$

Solution :1) $e^{1-x}\times e^{2x}=e\Leftrightarrow e^{2x+1-x}=e^1$

$\Leftrightarrow e^{x+1}=e^1\Leftrightarrow x+1=1\Leftrightarrow x=0$ donc : $S=\{0\}$

2) $\frac{e^{2-x}}{e^{1+2x}}=e^{x-1}\Leftrightarrow e^{(2-x)-(1+2x)}=e^{x-1}$

$\Leftrightarrow(2-x)-(1+2x)=x-1\Leftrightarrow-4x=-2\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Donc : $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

3) $e^{2x}-5e^x+6=0\Leftrightarrow\left(e^x\right)^2-5e^x+6=0$ on pose : $e^x=X$

Donc : $X^2-5X+6=0$ $\Delta=b^2-4ac=25-24=1>0$

$X_1=\frac{5+1}{2\times1}$ et $X_2=\frac{5-1}{2\times1}$ donc : $X_1=3$ et $X_2=2$

Donc : $e^{x_1}=3$ et $e^{x_2}=2$ donc : $x_1=\ln3$ et $x_2=\ln2$

Donc : $S=\{\ln2,\ln3\}$

4) cette équation est définie dans $\mathbb{R}$

$$e^{x^2}\cdot\left(e^x\right)^3=\left(e^{-x}\right)^5\cdot e^{-7}\Leftrightarrow e^{x^2}\cdot e^{3x}=e^{-5x}\cdot e^{-7}$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2+3x}=e^{-5x-7}\Leftrightarrow x^2+3x=-5x-7$$

$$\Leftrightarrow x^2+8x+7=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=8^2-4\times7\times1=64-28=36>0$$

$x_1=\frac{-8+6}{2\times 1}=\frac{-2}{2}=-1$ et $x_2=\frac{-8-6}{2\times 1}=\frac{-14}{2}=-7$

Donc : $S=\{-7;-1\}$

5) cette équation est définie dans $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow e^{-3}\left(e^{2x}-(e+1)e^{x+1}+e^3\right)\prec 0$

$\Leftrightarrow e^{2x}-(e+1)e^{x+1}+e^3\prec 0$ car $e^{-3}\succ 0$

$\Leftrightarrow \left(e^x\right)^2-\left(e^2+e\right)e^x+e^3\prec 0$

On pose : $e^x=t$ on aura : $t^2-\left(e^2+e\right)t+e^3\prec 0$

$t^2-\left(e^2+e\right)t+e^3=(t-e)\left(e^x-e^2\right)$

2)$e^{2x-3}-(e+1)e^{x-2}+1\prec 0\Leftrightarrow\left(e^x-e\right)\left(e^x-e^2\right)\prec 0$

$\Leftrightarrow\left(e^x-e^1\right)\left(e^x-e^2\right)\prec 0$

$\Leftrightarrow(x-1)(x-2)\prec 0$

$\Leftrightarrow x\in\left]1;2\right[$ donc : $S=\left]1;2\right[$

Exercice3 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)e^x$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+3}{x}$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+3x}{x^3}$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x+1}{e^x+2}$ 5) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x+1}$ 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x+1}$

7) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x+e^{-x}$ 8) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{-x+1}{x^3+5}}$ 9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{e^x+1}$

10) $\lim\limits_{x\to+\infty}2x-e^x$ 11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x^2}$ 12) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+3x}$

13) $\lim\limits_{x\to+\infty}3x^3-e^x$ 14) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+3x}{x^3}$

15) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^3}$ (on pose : $2x=X$) 16) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}}{x}$

17) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^3+x+1}$ 18) $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x-1)e^x$

19) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^5-4x^3\right)e^x$ 20) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$

21) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-2x\right)e^{2x}$ 22) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x}$

23) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$ 24) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^{1-x}-1}{x-1}$

25) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{x}$ 26) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x+1}-e}{x}$

Solution : 1) $(\forall x\in\mathbb{R});(2x-1)\mathrm{e}^x=2\left(x\mathrm{e}^x\right)-\mathrm{e}^x$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$

donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)e^x=0$

2) $(\forall x\in\mathbb{R}^*);\frac{\mathrm{e}^x+3}{x}=\frac{\mathrm{e}^x}{x}+\frac{3}{x}$ et puisque :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+3}{x}=+\infty$

3) $(\forall x\in\mathbb{R}^*);\frac{\mathrm{e}^x+3x}{x^3}=\frac{\mathrm{e}^x}{x^3}+\frac{3}{x^2}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+3x}{x^3}=+\infty$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x+1}{e^x+2}=\frac{0+1}{0+2}=\frac{1}{2}$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0^+$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x+1}=?$ on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}-x+1=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x+1}=+\infty$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x+1}$ on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}-x+1=-\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x+1}=0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0^+$

7) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x+e^{-x}$?

On a $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x+e^{-x}=+\infty$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{-x+1}{x^3+5}}$? on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x+1}{x^3+5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x^2}=0$

Donc : $\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{-x+1}{x^3+5}} = e^0 = 1$

9) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{e^x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$

Car : $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

10) $\lim_{x\to+\infty} 2x - e^x = \lim_{x\to+\infty} x\left(2-\frac{e^x}{x}\right) = -\infty$

Car : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} 2-\frac{e^x}{x} = -\infty$

11) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2}$ on a $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$

Et $\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x^2} = 0$ donc : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2} = +\infty$

12) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2+3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2\left(1+\frac{3}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{3}{x}}$

On a $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{3}{x}} = 1$ alors :

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2+3x} = +\infty$

13) $\lim_{x\to+\infty} 3x^3 - e^x = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(3-\frac{e^x}{x^3}\right)$

On a : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$ donc : $\lim_{x\to+\infty} 3-\frac{e^x}{x^3} = -\infty$

Donc : $\lim_{x\to+\infty} 3x^3 - e^x = -\infty$ car $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

14) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+3x}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3} + \frac{3x}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3} + \frac{3}{x^2} = +\infty$

Car : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x^2} = 0$

15) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x^3}$ (on pose : $2x = X$)

$2x = X \Leftrightarrow x = \frac{X}{2}$ $\quad x\to+\infty \Leftrightarrow X\to+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} = \lim_{X\to+\infty} \frac{e^X}{\left(\frac{X}{2}\right)^3} = \lim_{X\to+\infty} 8\frac{e^X}{X^3}$

puisque : $\lim_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X^3} = +\infty$ donc $\lim_{X\to+\infty} 8\frac{e^X}{X^3} = +\infty$

donc : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} = +\infty$

16) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}}{x}$ on pose : $3x = X$ donc : $x = \frac{X}{3}$

$x\to+\infty \Leftrightarrow X\to+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}}{x} = \lim_{X\to+\infty} \frac{e^X}{\frac{X}{3}} = \lim_{X\to+\infty} 3\frac{e^X}{X}$ on a $\lim_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$

Donc $\lim_{X\to+\infty} 3\frac{e^X}{X} = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}}{x} = +\infty$

17) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x^3+x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}$

On a montré que : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} = +\infty$ et on a

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}} = 1$

Donc : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x^3+x+1} = +\infty$

18) $\lim_{x\to-\infty} (3x-1)e^x = \lim_{x\to-\infty} 3xe^x - e^x$ et on a

$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$

Et $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0^-$ donc : $\lim_{x\to-\infty} (3x-1)e^x = 0$

19) $\lim_{x\to-\infty} \left(x^5-4x^3\right)e^x = \lim_{x\to-\infty} x^5e^x - 4x^3e^x$ et on a :

$\lim_{x\to-\infty} x^ne^x = 0$ donc : $\lim_{x\to-\infty} \left(x^5-4x^3\right)e^x = 0-0 = 0$

20) $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$? on pose : $\frac{1}{x}=X$

$x\to 0^- \Leftrightarrow X\to -\infty$

$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}=\lim_{X\to -\infty}Xe^X=0$ donc : $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}=0$

21) $\lim_{x\to -\infty}\left(x^3-2x\right)e^{2x}=\lim_{x\to -\infty}x^3e^{2x}-2xe^{2x}=0-2\times 0=0$

Car $\lim_{x\to -\infty}x^ne^x=0$

22) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x}$ on pose : $2x=X$

$x\to 0\Leftrightarrow X\to 0$

$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x}=\lim_{X\to 0}\frac{e^X-1}{3\frac{X}{2}}=\lim_{X\to 0}\frac{2}{3}\frac{e^X-1}{X}=\frac{2}{3}\times 1=\frac{2}{3}$

Car : $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

23) $\lim_{x\to +\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$ on pose : $\frac{1}{x}=X$ donc $x=\frac{1}{X}$

$x\to +\infty\Leftrightarrow X\to 0$

$\lim_{x\to +\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=\lim_{X\to 0}\frac{1}{X}\left(e^X-1\right)=\lim_{X\to 0}\frac{e^X-1}{X}=1$

24) $\lim_{x\to 1}\frac{e^{1-x}-1}{x-1}$ on pose : $1-x=X$ donc $x=1-X$

$x\to 1\Leftrightarrow X\to 0$

$\lim_{x\to 1}\frac{e^{1-x}-1}{x-1}=\lim_{X\to 0}\frac{e^X-1}{-X}=\lim_{X\to 0}-\frac{e^X-1}{X}=-1$

car $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

25) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{x}$ on pose : $-x=X$ donc $x=-X$

$x\to 0\Leftrightarrow X\to 0$

$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{x}=\lim_{X\to 0}\frac{e^X-1}{-X}=\lim_{X\to 0}-\frac{e^X-1}{X}=-1$

26) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x+1}-e}{x}$

On pose : $f(x)=e^{x+1}$ donc : $f(0)=e^{0+1}=e^1=e$

Et : $f'(x)=(x+1)'e^{x+1}=1e^{x+1}=e^{x+1}$ et $f'(0)=e$

Donc : $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x+1}-e}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=e$

Exercice4 : Déterminer les dérivées des fonctions suivantes : 1) $f(x)=e^{\sqrt{2x+1}}$

2) $g(x)=e^{-2x^2}-3e^{3x+1}$ 3) $h(x)=e^{\frac{x+1}{-x+3}}$

4) $f(x)=\left(e^x-4\right)\sqrt{e^x-1}$

Solutions : 1) $f(x)=e^{\sqrt{2x+1}}$

la fonction : $u_1 : x\to\sqrt{2x+1}$ est dérivable sur

$\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ et $u_1'(x)=\frac{(2x+1)'}{2\sqrt{2x+1}}=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

Donc la fonction f est dérivable sur

$\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ et $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}e^{\sqrt{2x+1}}$

2) $g(x)=e^{-2x^2}-3e^{3x+1}$ les fonctions:

$u_1 : x\to -2x^2$ et $u_2 : x\to 3x+1$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a :

$u_1'(x)=-4x$ et $u_2'(x)=3$

Donc la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $g'(x)=-4xe^{-2x^2}-9e^{3x+1}$

3) $h(x)=e^{\frac{x+1}{-x+3}}$

la fonction : $u : x\to\frac{x+1}{-x+3}$ est dérivable sur

$]3;+\infty[$ et $]-\infty;3[$ et $u'(x)=\frac{4}{(x-3)^2}$

Donc la fonction f est dérivable sur $]3;+\infty[$ et $]-\infty;3[$ et $h'(x)=\dfrac{4}{(x-3)^2}e^{\frac{x+1}{-x+3}}$

4) $f(x)=(e^x-4)\sqrt{e^x-1}$

$$f'(x)=\left((e^x-4)\sqrt{e^x-1}\right)'=\left((e^x-4)\right)'\sqrt{e^x-1}+(e^x-4)\left(\sqrt{e^x-1}\right)'$$

$$f'(x)=e^x\sqrt{e^x-1}+(e^x-4)\frac{(e^x-1)'}{2\sqrt{e^x-1}}=e^x\sqrt{e^x-1}+(e^x-4)\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}$$

$$f'(x)=\frac{2e^x(e^x-1)+e^x(e^x-4)}{2\sqrt{e^x-1}}=\frac{2e^{2x}-2e^x+e^{2x}-4e^x}{2\sqrt{e^x-1}}=\frac{3e^{2x}-6e^x}{2\sqrt{e^x-1}}$$

Exercice5 : Déterminer les primitives des fonctions suivantes : 1) $f(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

2) $g(x)=\left(e^x\right)^2$ 3) $h(x)=\dfrac{e^{\arctan x}}{1+x^2}$

Solutions : 1) $f(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ Si on pose : $u(x)=\sqrt{x}$

On a : $f(x)=2u'(x)e^{u(x)}$ si $x>0$ donc

les primitives de f sont :

$$F(x)=2e^{u(x)}+\lambda=2e^{\sqrt{x}}+\lambda \qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

2) $g(x)=\left(e^x\right)^2$ Si on pose : $u(x)=e^x$

On a : $g(x)=u'(x)u(x)$ donc les primitives de g sont : $G(x)=\dfrac{1}{2}u^2(x)+\lambda=\dfrac{1}{2}\left(e^x\right)^2+\lambda \quad \lambda\in\mathbb{R}$

3) $h(x)=\dfrac{e^{\arctan x}}{1+x^2}$ Si on pose : $u(x)=\arctan x$

On a : $h(x)=u'(x)e^{u(x)}$ donc les primitives de h sont : $H(x)=e^{\arctan x}+\lambda \quad \lambda\in\mathbb{R}$

Exercice6 : Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1) $I=\mathbb{R};\ f(x)=2e^{3x}-e^{-x}$

2) $I=]0;+\infty[;\ f(x)=\dfrac{e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^2}$

3) $I=\mathbb{R};\ f(x)=e^x\left(e^x-1\right)^3$

4) $I=[0;\pi];\ f(x)=\sin xe^{\cos x}$

5) $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$ $\quad I=]0;+\infty[$

Solutions :1) $I=\mathbb{R};\ f(x)=2e^{3x}-e^{-x}$

$$f(x)=2e^{3x}-e^{-x}=\frac{2}{3}(3x)'e^{3x}+(-x)'e^{-x}$$

$F(x)=\dfrac{2}{3}e^{3x}+e^{-x}$ est une primitive de f sur I

2) $I=]0;+\infty[;\ f(x)=\dfrac{e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^2}$

$$f(x)=\frac{e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^2}=\frac{1}{2}\frac{\left(e^{2x}-1\right)'}{\left(e^{2x}-1\right)^2}$$

Donc : $F(x)=-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{e^{2x}-1}$ est une primitive de f sur I

3) $I=\mathbb{R};\ f(x)=e^x\left(e^x-1\right)^3$

$$f(x)=e^x\left(e^x-1\right)^3=\left(e^x-1\right)'\left(e^x-1\right)^3$$

donc : $F(x)=\dfrac{1}{3+1}\left(e^x-1\right)^{3+1}=\dfrac{1}{4}\left(e^x-1\right)^4$ est une primitive de f sur I

4) $I=[0;\pi];\ f(x)=\sin xe^{\cos x}$

$$f(x)=\sin xe^{\cos x}=-(\cos x)'e^{\cos x}$$

donc : $F(x)=e^{\cos x}$ est une primitive de f sur I

5) $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$ $\quad I=]0;+\infty[$

$f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}=\dfrac{\left(e^x-x\right)'}{e^x-x}$ donc : $F(x)=\ln\left|e^x-x\right|$ est une primitive de f sur I

Exercice7 : Considérons la fonction f définie par :

$f(x)=(x-1)e^{x}$

1)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
2) Etudier les branches infinies de la courbe Cf au voisinage de +∞
3) Etudier la concavité de la courbe Cf
4) Construire la courbe C_f.

Solution : 1) $D_f=\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)e^{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}-e^{x}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)e^{x}=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$

Car : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0^{+}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$

Donc : $y=0$ est une asymptote a (C) au voisinage de $-\infty$

$f'(x)=((x-1)e^{x})'=(x-1)'e^{x}+(x-1)(e^{x})'$

$f'(x)=1e^{x}+(x-1)e^{x}=e^{x}+xe^{x}-e^{x}=xe^{x}$

Le signe de : $f'(x)$ est celui de x

Tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-1)e^{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x}e^{x}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$ donc :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x}e^{x}=1\times(+\infty)=+\infty$

Donc : la courbe Cf admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées au voisinage de +∞
3) Etudie de la concavité de la courbe Cf :

$f''(x)=(xe^{x})'=(x)'e^{x}+x(e^{x})'=e^{x}(1+x)$

Le signe de : $f''(x)$ est celui de : $x+1$

$x+1=0\Leftrightarrow x=-1$

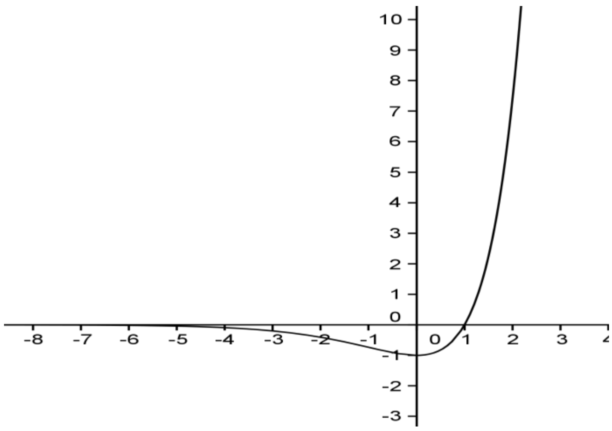
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	

Donc :

(C_f) est convexe sur $[-1;+\infty[$

(C_f) est concave sur $]-\infty;-1]$ et $A(-1,-2e^{-1})$ est un point d'inflexion de (C_f)

4)



Exercice8 : Considérons la fonction f définie par : $f(x)=x-1+\dfrac{3}{e^{x}+1}$

1)déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f

2)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3)montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}); f(x)=x+2-\dfrac{3e^{x}}{e^{x}+1}$

4) Etudier les branches infinies de la courbe Cf
Et étudier la position de la courbe Cf avec les asymptotes obliques
Solutions :

1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/e^{x}+1\neq 0\}$

$e^{x}+1=0\Leftrightarrow e^{x}=-1$ pas de solutions car $e^{x}>0\ \forall x\in\mathbb{R}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-1+\dfrac{3}{e^{x}+1}=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{e^x+1}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x-1+\frac{3}{e^x+1}=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} x-1=-\infty$

Et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{e^x+1}=3$

2) $f'(x)=\left(x-1+\frac{3}{e^x+1}\right)''=1-3\frac{\left(e^x+1\right)'}{\left(e^x+1\right)^2}=1-3\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$

$$f'(x)=\frac{\left(e^x+1\right)^2-3e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{\left(e^x\right)^2+2e^x+1-3e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{\left(e^x\right)^2-e^x+1}{\left(e^x+1\right)^2}$$

Le signe de : $f'(x)$ est celui de : $\left(e^x\right)^2-e^x+1$

On pose : $e^x=X$ donc on a : $X^2-X+1=0$

$\Delta=b^2-4ac=1-4=-3<0$

Donc : $X^2-X+1\succ 0$ (signe de a)

Donc : $\left(e^x\right)^2-e^x+1>0$ par suite: $f'(x)>0$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

3)montrons que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f(x)=x+2-\frac{3e^x}{e^x+1}$

$$f(x)=x-1+\frac{3}{e^x+1}=x+2-3+\frac{3}{e^x+1}$$

$$f(x)=x+2+\frac{-3\left(e^x+1\right)+3}{e^x+1}=x+2+\frac{-3e^x-3+3}{e^x+1}$$

$$f(x)=x+2-\frac{3e^x}{e^x+1}$$

4) Etude des branches infinies ?

a)On a $f(x)=x-1+\frac{3}{e^x+1}$ donc $f(x)-(x-1)=\frac{3}{e^x+1}$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{e^x+1}=0$

Par suite :la droite d'équation $(\Delta)\,y=x-1$ est une asymptote oblique a la courbe Cf au voisinage de $+\infty$ et on a aussi : $f(x)-(x-1)=\frac{3}{e^x+1}>0$

Donc :la courbe Cf est au-dessus de la droite d'équation $(\Delta)\,y=x-1$

b) On a $f(x)=x+2-\frac{3e^x}{e^x+1}$ donc $f(x)-(x+2)=-\frac{3e^x}{e^x+1}$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+2)=\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{3e^x}{e^x+1}=0$

Par suite :la droite d'équation $(D)\,y=x+2$ est une asymptote oblique a la courbe Cf au voisinage de $-\infty$ et on a aussi : $f(x)-(x+2)=-\frac{3e^x}{e^x+1}<0$

Donc :la courbe Cf est au-dessous de la droite d'équation $(D)\,y=x+2$

Exercice9 : Considérons la fonction f définie par : $f(x)=\left(e^x-4\right)\sqrt{e^x-1}$

1)déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f

2)montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_*^+\right)$ $\frac{f(x)}{x}=\frac{e^x-4}{\sqrt{e^x-1}}\cdot\frac{e^x-1}{x}$

3) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite de 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu

4) montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_*^+\right)$ $f'(x)=\frac{3e^x\left(e^x-2\right)}{2\sqrt{e^x-1}}$

5)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

6) Etudier les branches infinies de la courbe C_f Au voisinage de $+\infty$

7)calculer : $f(2\ln 2)$ et construire la courbe C_f.

Solutions : 1) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,e^x-1\geq 0\right\}$

$e^x-1\geq 0\Leftrightarrow e^x\geq 1\Leftrightarrow x\geq\ln 1\Leftrightarrow x\geq 0$

Donc : $D_f=\mathbb{R}^+$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-4\right)\sqrt{e^x-1}=+\infty$

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x-4=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{e^x-1}=+\infty$

2) $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{(e^x-4)\sqrt{e^x-1}}{x}=\dfrac{(e^x-4)\left(\sqrt{e^x-1}\right)^2}{x\sqrt{e^x-1}}$

$\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{(e^x-4)(e^x-1)}{x\sqrt{e^x-1}}=\dfrac{e^x-4}{\sqrt{e^x-1}}\cdot\dfrac{e^x-1}{x}$

3) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x-4}{\sqrt{e^x-1}}\cdot\dfrac{e^x-1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x-4}{\sqrt{e^x-1}}\cdot\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x-1}{x}$ puisque : $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

.

Et $\lim\limits_{x\to0^+} e^x-4=-3$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{e^x-1}=0^+$

Donc : $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\infty$

Donc la fonction f n'est pas dérivable
à droite de 0

Interprétation géométriquement :

la courbe Cf admet une demie tangente vertical

adroite du point $O(0;0)$ dirigé vers le bas

car : $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\infty$ $\quad(+)\times(-)=(-)$

4) montrons que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_*^+\right)$ $f'(x)=\dfrac{3e^x(e^x-2)}{2\sqrt{e^x-1}}$?

$f'(x)=\left((e^x-4)\sqrt{e^x-1}\right)'=(e^x-4)'\sqrt{e^x-1}+(e^x-4)\left(\sqrt{e^x-1}\right)'$

$f'(x)=e^x\sqrt{e^x-1}+(e^x-4)\dfrac{(e^x-1)'}{2\sqrt{e^x-1}}=e^x\sqrt{e^x-1}+\dfrac{e^x(e^x-4)}{2\sqrt{e^x-1}}$

$f'(x)=\dfrac{2e^x\left(\sqrt{e^x-1}\right)^2+e^x(e^x-4)}{2\sqrt{e^x-1}}=\dfrac{2e^x(e^x-1)+e^x(e^x-4)}{2\sqrt{e^x-1}}$

$f'(x)=\dfrac{2e^{2x}-2e^x+e^{2x}-4e^x}{2\sqrt{e^x-1}}=\dfrac{3e^{2x}-6e^x}{2\sqrt{e^x-1}}=\dfrac{3e^x(e^x-2)}{2\sqrt{e^x-1}}$

5)le signe de : $f'(x)$ est celui de e^x-2

car $\dfrac{3e^x}{2\sqrt{e^x-1}}>0\ \left(\forall x\in\mathbb{R}_*^+\right)$

$e^x-2>0\Leftrightarrow e^x>2\Leftrightarrow x>\ln 2$

$f(\ln 2)=\left(e^{\ln 2}-4\right)\sqrt{e^{\ln 2}-1}=(2-4)\sqrt{2-1}=-2$

x	0		$ln2$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

6) Etude des branches infinies de la courbe C_f

Au voisinage de +∞ ?

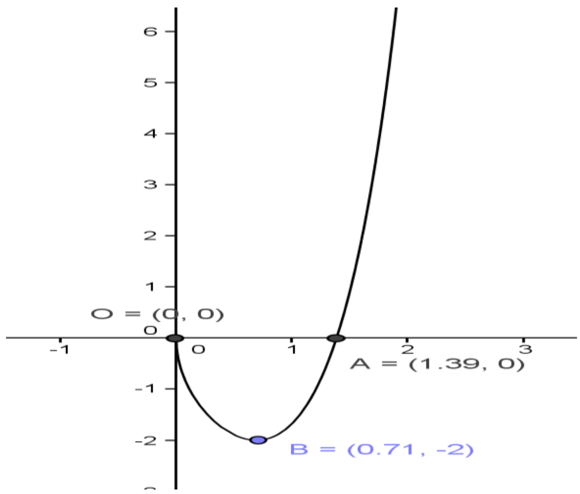
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{4}{x}\right)\sqrt{e^x-1}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{e^x-1}=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ Donc : la courbe Cf admet

une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées au voisinage de +∞

$f(2\ln 2)=\left(e^{2\ln 2}-4\right)\sqrt{e^{2\ln 2}-1}=\left(e^{\ln 4}-4\right)\sqrt{e^{\ln 4}-1}=(4-4)\sqrt{4-1}=0$



Exercice10 :: Considérons la fonction f définie

par : $f(x)=\sqrt{e^{-x}-e^{-2x}}$

1)déterminer D_f et calculer les limites aux

bornes de D_f

2) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f à droite de 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu

3)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4) construire la courbe C_f.

Solutions : 1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / e^{-x} - e^{-2x} \geq 0\}$

$e^{-x} - e^{-2x} \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x} \geq e^{-2x} \Leftrightarrow -x \geq -2x \Leftrightarrow x \geq 0$

Donc : $D_f = [0;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{e^{-x} - e^{-2x}} = 0$

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$

2) a) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{e^{-x} - e^{-2x}} = 0 = f(0)$

Donc f est continue à droite de 0

b)

$$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{e^{-x}-e^{-2x}}}{x} = \lim_{x\to0^+} \sqrt{\frac{e^{-x}\left(1-e^{-x}\right)}{x^2}}$$

$= \lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{\frac{e^{-x}}{x} \times \frac{e^{-x}-1}{-x}}$ on a : $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{e^{-x}}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{e^{-x}-1}{-x} = 1$

Donc : $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$

Donc la fonction f n'est pas dérivable à droite de 0

Interprétation géométriquement :

la courbe Cf admet une demie tangente vertical adroite du point $O(0;0)$ dirigé vers le haut

car : $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty \quad (+)\times(+) = (+)$

3)Etude des variations de f :

$$f'(x) = \left(\sqrt{e^{-x}-e^{-2x}}\right)' = \frac{\left(e^{-x}-e^{-2x}\right)'}{2\sqrt{e^{-x}-e^{-2x}}^{\,2}}$$

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}+2e^{-2x}}{2\sqrt{e^{-x}-e^{-2x}}^{\,2}} = \frac{e^{-x}\left(2e^{-x}-1\right)}{2\sqrt{e^{-x}-e^{-2x}}^{\,2}}$$

le signe de : $f'(x)$ est celui de $2e^{-x}-1$

car $\frac{e^{-x}}{2\sqrt{e^{-x}-e^{-2x}}^{\,2}} > 0 \left(\forall x \in \mathbb{R}_*^+\right)$

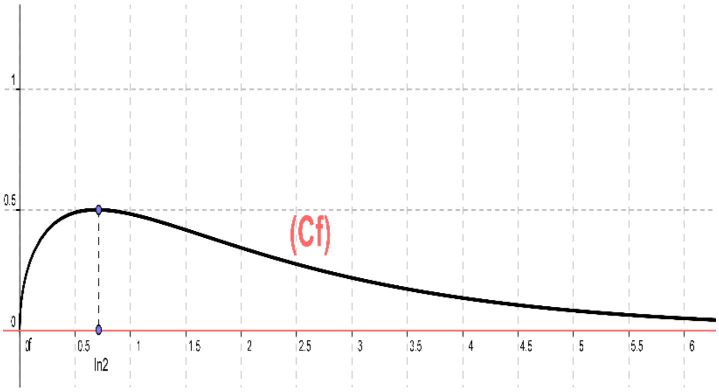
on a : $2e^{-x}-1 = \frac{1}{e^x}\left(2-e^x\right)$

$2-e^x > 0 \Leftrightarrow e^x \prec 2 \Leftrightarrow x \prec \ln 2$

$$f(\ln 2) = \sqrt{e^{-\ln 2} - e^{-2\ln 2}} = \sqrt{\frac{1}{e^{\ln 2}} - \frac{1}{e^{2\ln 2}}} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

x	0		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$1/2$	$\searrow$	0

4) la courbe C_f :



Exercice11 : Considérons la fonction f définie par : $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

1)déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f

2)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3) montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J que l'on déterminera

4) déterminer : $f^{-1}(x) \quad \forall x \in J$

Solutions : $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 1-e^{2x} > 0\}$

$1-e^{2x} > 0 \Leftrightarrow 1 > e^{2x} \Leftrightarrow e^0 > e^{2x} \Leftrightarrow 0 > 2x \Leftrightarrow x < 0$

Donc : $D_f =]-\infty, 0[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}=\frac{0}{\sqrt{1-0}}=0$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}\left(\frac{1}{e^{2x}}-1\right)}}=+\infty$

Car : $\lim\limits_{x\to0^-}\sqrt{e^{2x}\left(\frac{1}{e^{2x}}-1\right)}=0^+$

2) $f'(x)=\left(\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\right)'=\frac{(e^x)'\sqrt{1-e^{2x}}-e^x\left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)'}{\left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)^2}$

$$f'(x)=\frac{e^x\sqrt{1-e^{2x}}-e^x\frac{(1-e^{2x})'}{2\sqrt{1-e^{2x}}}}{\left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)^2}=\frac{\frac{2e^x(1-e^{2x})+2e^xe^{2x}}{2\sqrt{1-e^{2x}}}}{1-e^{2x}}$$

$$f'(x)=\frac{2e^x-2e^{3x}+2e^{3x}}{2\sqrt{1-e^{2x}}(1-e^{2x})}=\frac{2e^x}{2\sqrt{1-e^{2x}}(1-e^{2x})}>0$$

$\forall x\in\left]-\infty,0\right[$

x	$-\infty$	0
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$0\nearrow$	$+\infty$

3) on a f est une fonction continue et strictement croissante sur $I=\left]-\infty,0\right[$ donc f admet une fonction réciproque f^{-1}définie sur l' intervalle $J=f(I)=f\left(\left]-\infty,0\right[\right)=\left]0;+\infty\right[$

$$\begin{cases} f(y)=x \\ y\in I\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ x\in J\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{e^y}{\sqrt{1-e^{2y}}}=x \\ y\in\left]-\infty,0\right[\end{cases}\Leftrightarrow\left(\frac{e^y}{\sqrt{1-e^{2y}}}\right)^2=x^2\Leftrightarrow\frac{e^{2y}}{1-e^{2y}}=x^2$$

$$e^{2y}=x^2\left(1-e^{2y}\right)\Leftrightarrow e^{2y}=x^2-x^2e^{2y}\Leftrightarrow e^{2y}+x^2e^{2y}=x^2$$

$$e^{2y}\left(1+x^2\right)=x^2\Leftrightarrow e^{2y}=\frac{x^2}{1+x^2}\Leftrightarrow 2y=\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)\Leftrightarrow y=\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow y=\ln\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}$$

Donc: $f^{-1}(x)=\ln\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}\quad\forall x\in\left]0;+\infty\right[$

Exercice12 : Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=1-\ln\left(1+e^{-x}\right)$ et soit (C) la courbe De f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ avec $\|\vec{i}\|=2cm$

1)a)montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ et interpréter géométriquement le résultat

b) montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

2)a)vérifier que: $\forall x\in\mathbb{R}$; $f(x)=x+1-\ln\left(1+e^x\right)$

b) en déduire la droite (D)d'équation : $y=x+1$ est une asymptote oblique a la courbe Cf au voisinage de $-\infty$

c) étudier la position de la courbe Cf avec la droite (D)

3)a) montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f'(x)=\frac{1}{1+e^x}$

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

c) Etudier la concavité de Cf

d) montrer que la courbe Cf coupe l'axe des abscisses en un point à déterminer

4) Construire la courbe C_f dans le repére$(O;\vec{i}\ \vec{j})$

5) a)montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J que l'on déterminera

b) déterminer : $f^{-1}(x)\ \ \forall x\in J$

Solutions : $f(x)=1-\ln\left(1+e^{-x}\right)$

1)a)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}1-\ln\left(1+e^{-x}\right)=\lim_{x\to+\infty}1-\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)=1$$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$

Interprétation géométriquement :

$y=1$ est une asymptote a (C) au voisinage de $+\infty$

1)b) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}1-\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)=-\infty$

Car: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x}=+\infty$

2)a)Montrons que: $\forall x\in\mathbb{R}$; $f(x)=x+1-\ln(1+e^x)$?

$f(x)=1-\ln(1+e^{-x})=1-\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)=1-\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right)$

$f(x)=1-\ln(e^x+1)+\ln(e^x)=1-\ln(e^x+1)+x$

Donc: $f(x)=x+1-\ln(e^x+1)\quad\forall x\in\mathbb{R}$

2)b)on a : $f(x)=x+1-\ln(e^x+1)$

Donc : $f(x)-(x+1)=-\ln(e^x+1)$

Donc: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-(x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}-\ln(e^x+1)=0$ car: $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$

Par suite :la droite d'équation $(D):y=x+1$ est une asymptote oblique à la courbe Cf au voisinage de $-\infty$

2)c) $f(x)-(x+1)=-\ln(e^x+1)$

On a : $e^x>0\quad\forall x\in\mathbb{R}$ donc : $e^x+1>1$

Donc: $\ln(e^x+1)>\ln 1$ Donc: $\ln(e^x+1)>0$

Donc: $-\ln(e^x+1)<0$

Donc :la courbe Cf est au-dessous de la droite d'équation $(D):y=x+1$

3)a)montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=\frac{1}{1+e^x}$?

$f'(x)=\left(x+1-\ln(1+e^x)\right)'=1-\frac{(1+e^x)'}{1+e^x}=1-\frac{e^x}{1+e^x}$

$f'(x)=\frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}=\frac{1}{1+e^x}>0\quad\forall x\in\mathbb{R},$

3)b) *Tableau de variation :*

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ 1

3)c) Etude de la concavité de Cf :

$f''(x)=\left(\frac{1}{1+e^x}\right)'=-\frac{(1+e^x)'}{(1+e^x)^2}=-\frac{e^x}{(1+e^x)^2}<0\quad\forall x\in\mathbb{R},$

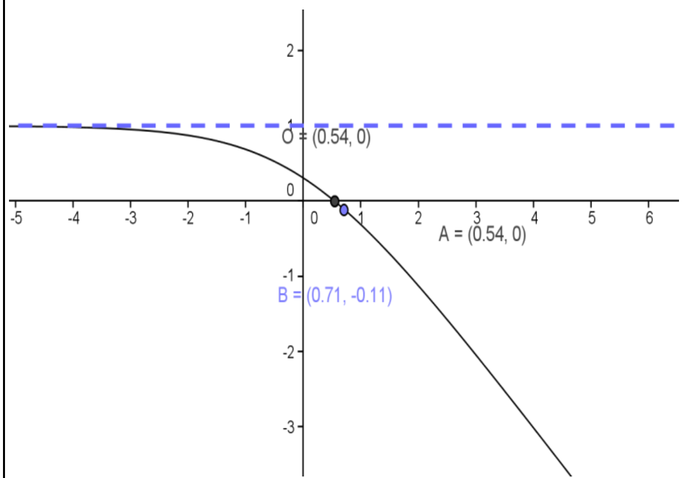
la courbe Cf est convexe dans $\mathbb{R}$,

3)d) $f(x)=0\Leftrightarrow 1-\ln(1+e^{-x})=0\Leftrightarrow\ln(1+e^{-x})=1$

$\Leftrightarrow\ \ln(1+e^{-x})=\ln e\Leftrightarrow e^{-x}=e-1\Leftrightarrow -x=\ln(e-1)$

$\Leftrightarrow\ x=-\ln(e-1)$ Donc le point d'intersection de la courbe Cf avec l'axe des abscisses est :

$A(-\ln(e-1);0)$



5) a) on a f est une fonction continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc f admet une fonction réciproque f^{-1}définie sur l' intervalle

$J=f(I)=f(\mathbb{R})=]-\infty;1[$

$$\begin{cases}f(y)=x\\ y\in I\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=f^{-1}(x)\\ x\in J\end{cases}$$

$$\begin{cases}1-\ln(1+e^{-y})=x\\ y\in\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow 1-x=\ln(1+e^{-y})\Leftrightarrow 1+e^{-y}=e^{1-x}$$

$e^{-y}=e^{1-x}-1\Leftrightarrow -y=\ln(e^{1-x}-1)\Leftrightarrow y=-\ln(e^{1-x}-1)$

Donc: $\forall x \in]-\infty;1[\quad f^{-1}(x) = -\ln\left(e^{1-x}-1\right)$

Exercice13 :

Partie 1 : Considérons la fonction f définie sur ℝ+ par : $f(x) = (x+2)e^{\frac{-2}{x}}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f à droite de 0.
2) Interpréter géométriquement le résultat obtenu.
3) Déterminer la limite en +∞
4) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f puis dresser le tableau de variation de f.
5) a) Montrer que ($\forall t > 0$) $0 \prec e^{-t} + t - 1 \prec \frac{t^2}{2}$

b) En déduire que : ($\forall x > 0$)

$\frac{-4}{x} \prec f(x) - x \prec \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}$

c) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe Cf au voisinage de +∞
6) Construire la courbe C_f.

Partie 2 :

Considérons la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$f_n(x) = (x+2n)e^{\frac{-2}{x}}$ si $x > 0$ et $f_n(0) = 0$

où $n \in \mathbb{N}^*$

1) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f_n à droite de 0.

b) Déterminer la limite en +∞

c) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f_n puis dresser le tableau de variation de f_n.

2) Montrer que l'équation $f_n(x) = \frac{2}{n}$ admet une solution unique α_n dans]0, +∞[

3)a) Montrer que ($\forall x > 0$)

$f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1} \succ f_n(x) - \frac{2}{n}$

b) En déduire la monotonie de $(\alpha_n)_n$

c) Montrer que la suite $(\alpha_n)_n$ est convergente et que $\lim_{n\to+\infty} (\alpha_n)_n = 0$

Exercice14 : Résoudre les équations et inéquations suivantes dans ℝ :

1) $5^x = 15$ 2) $3^{2x} \geq 5^{1-x}$ 3) $7^{x+1} - 7^{-x} \prec 6$

Solution : 1) $5^x = 15$

$5^x = 15 \Leftrightarrow e^{x\ln 5} = 15 \Leftrightarrow x\ln 5 = \ln 15 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 15}{\ln 5}$

Donc : $S = \left\{\frac{\ln 15}{\ln 5}\right\}$..

2) $3^{2x} \geq 5^{1-x} \Leftrightarrow \ln\left(3^{2x}\right) \geq \ln\left(5^{1-x}\right)$

$\Leftrightarrow 2x\ln 3 \geq (1-x)\ln 5 \Leftrightarrow x(2\ln 3 + \ln 5) \geq \ln 5$

Donc : $S = \left[\frac{\ln 5}{2\ln 3 + \ln 5}; +\infty\right[$

3) $7^{x+1} - 7^{-x} \prec 6 \Leftrightarrow 7^{x+1} - \frac{1}{7^x} \prec 6$ on a $7^x \succ 0$

$7^{2x+1} - 1 \prec 6\times 7^x \Leftrightarrow 7\times\left(7^x\right)^2 - 6\times 7^x - 1 \prec 0$

on pose : $t = 7^x \quad \Leftrightarrow 7t^2 - 6\times t - 1 \prec 0$

on a : $7t^2 - 6\times t - 1 = (t-1)(7t+1)$

$7^{x+1} - 7^{-x} \prec 6 \Leftrightarrow \left(7^x - 1\right)\left(7\times 7^x + 1\right) \prec 0$

$\Leftrightarrow \left(7^x - 1\right)\left(7^{x+1} + 1\right) \prec 0 \Leftrightarrow 7^x - 1 \prec 0$ car $7^{x+1} \succ 0$

$\Leftrightarrow 7^x \prec 1 \Leftrightarrow 7^x \prec 7^0 \Leftrightarrow x \prec 0$ car $x \to 7^x$ est strictement croissante $(7 \succ 1)$ donc : $S =]-\infty;0[$

Exercice15 : Résoudre les équations et inéquations suivantes dans ℝ :

1) $2^{x+1} = 8^x$ 2) $3^x = 12$ 3) $5\times 2^x + 2^{x+1} - 336 = 0$

4) $100^x + 40 = 14\times 10^x$

5) $2^{x-1} > 4^x$ 5) $(0,5)^{2x} \geq (0,5)^{x+1}$

Solution :1) $2^{x+1}=8^x \Leftrightarrow 2^{x+1}=\left(2^3\right)^x \Leftrightarrow 2^{x+1}=2^{3x}$

$x+1=3x \Leftrightarrow 1=2x \Leftrightarrow \frac{1}{2}=x$ donc : $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

2) $3^x=12 \Leftrightarrow x=\log_3 12$ donc : $S=\{\log_3 12\}$

3) $2^x-3\times 2^{x+1}-16=0 \Leftrightarrow 2^x-6\times 2^x-16=0$

On pose : $2^x=X$ donc : $X^2-6X-16=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2+4\times1\times16=100>0$

Donc : $X_1=8$ et $X_2=-2$

Donc : $2^x=8$ et $2^x=-2$ or $2^x \succ 0$ donc l'équation $2^x=-2$ n'a pas de solutions

$2^x=8 \Leftrightarrow x=\log_2 8 \Leftrightarrow x=\log_2 2^3 \Leftrightarrow x=2$ donc : $S=\{3\}$

4) $100^x+40=14\times10^x \Leftrightarrow 10^{2x}-14\times10^x+40=0$

$\Leftrightarrow \left(10^x\right)^2-14\times10^x+40=0$ on pose : $10^x=X$

On a alors : $X^2-14X+40=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-14)^2-4\times40=36>0$

$X_1=\frac{14+6}{2\times1}$ et $X_2=\frac{14-6}{2\times1}$ donc : $X_1=10$ et $X_2=4$

Donc : $10^{x_1}=10$ et $10^{x_2}=4$ donc **:** $x_1=1$ et

$x_2=\log_{10}4$ Donc : $S=\{1,\log_{10}4\}$

5) $2^{x-1}>4^x \Leftrightarrow 2^{x-1}>\left(2^2\right)^x \Leftrightarrow 2^{x-1}>2^{2x} \Leftrightarrow x-1>2x$

$\Leftrightarrow -1>x$ donc : $S=]-\infty,-1[$

6) $(0,5)^{2x}>(0,5)^{x+1} \Leftrightarrow 2x<x+1$ car $x\to(0,5)^x$ est strictement décroissante car : $0\prec 0,5\prec 1$

$(0,5)^{2x}>(0,5)^{x+1} \Leftrightarrow x<1$ donc : $S=]-\infty,1[$

Exercice16: Déterminer les primitives de la fonction suivante : $f(x)=3^{x-2}$

Solutions : 1) $f(x)=3^{x-2}$ Si on pose : $u(x)=x-2$

On a : $f(x)=u'(x)3^{u(x)}$ donc les primitives de f sont : $F(x)=\frac{1}{\ln 3}3^{u(x)}+\lambda=\frac{1}{\ln 3}3^{x-2}+\lambda \quad \lambda\in\mathbb{R}$

Exercice17: Soit La fonction f définie par :

$f(x)=4^x-2^{x+1}$ 1)déterminer D_f

2) calculer les limites aux bornes de D_f

3)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4) Etudier les branches infinies de la courbe Cf

5) construire la courbe C_f dans un repére$\left(O;\vec{i}\ \vec{j}\right)$

Solutions : 1) $f(x)=e^{x\ln 4}-e^{(x+1)\ln 2}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}$

2)

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{2x\ln 2}-e^{(x+1)\ln 2}=\lim_{x\to+\infty} e^{x\ln 2}\left(e^{x\ln 2}-2\right)=+\infty$

Car : $\lim_{X\to+\infty} e^X=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{2x\ln 2}-e^{(x+1)\ln 2}=0$ Car : $\lim_{X\to-\infty} e^X=0$

3) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$:

$\forall x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=2\ln 2\times e^{x\ln 2}\times\left(e^{x\ln 2}-1\right)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{x\ln 2}-1=0 \Leftrightarrow x=0$

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

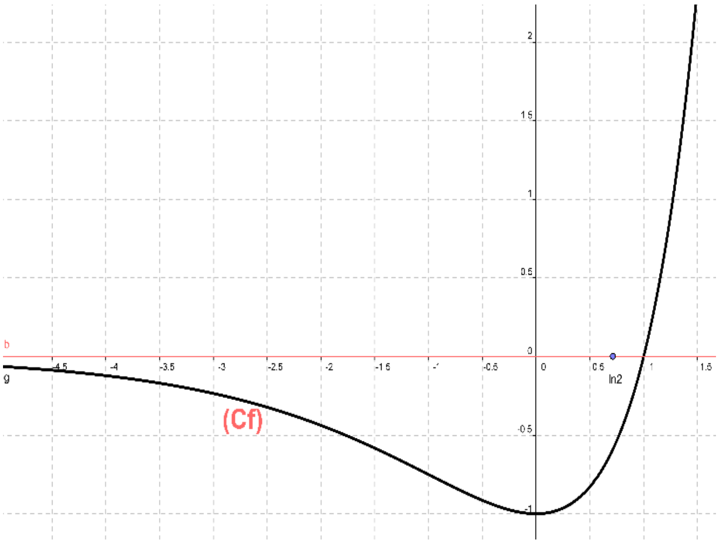
4) Etude des branches infinies de la courbe Cf :

a)on a : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ donc : $y=0$ est une asymptote a(C)

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x\ln 2}}{x}\left(e^{x\ln 2}-2\right)=+\infty$

Car : $\lim_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X}=+\infty$ et $\lim_{X\to+\infty} e^X=+\infty$

Donc : la courbe Cf admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées au voisinage de +∞



Exercice 18: Soit La fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :f: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$x \to x^x$, si $x \neq 0$ et $f(0)=0$

1)Etudier la continuité de la fonction f à droite de 0.
2)Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite de 0.
3)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
4)Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe Cf au voisinage de +∞.
5)Tracer la courbe Cf.
6)Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = x$

7)Soit la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_0 = \frac{1}{e}$

et $(\forall n \in \mathbb{N})(u_{n+1} = f(u_n))$.

a)Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})(u_n \leq 1)$

b)Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_n$; puis en déduire qu'elle convergente.

c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$

Exercice 19 : Soit $n \in \mathbb{N}*$; considérons la fonction f_n définie sur [1, +∞[par :

$f_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{(\ln x)^n}{x^2}$ si $x > 0$ et $f_n(0) = 0$

et (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\mathcal{R}(O, \vec{i},\vec{j})$.

1. Donner le tableau de variation de f_1.
2. Déterminer l'équation de la tangente (T_1) à la courbe (C_1) en point d'abscisse 1.
3. Construire la courbe (C_1) et la tangente (T_1) dans le repère $\mathcal{R}(O, \vec{i},\vec{j})$.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f_n.
5. a) Etudier sur l'intervalle [1, +∞[le signe de : $f_2(x) - f_1(x)$

b) En déduire les positions relatives des deux courbes (C_1) et (C_2) ; puis construire (C_2)

6. Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ où u_n est la valeur maximale de la fonction f_n.

a) Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}*)$: $u_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{2e}\right)^n$

b) Pour $x \in]1, +\infty[$; calculer $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$

c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}*)$ $\left(u_{n+1} = \frac{1}{2} f_n(e^{\frac{n+1}{2}})\right)$

d) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}*)$ $\left(u_n \leq \frac{1}{e}\frac{1}{2^n}\right)$

Et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice20 : Partie 1

1. En utilisant le T.A.F sur la fonction : $t \to e^{-t}$;

montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}*+)(\exists \theta \in \mathbb{R}*+)$ $\left(e^{\theta} = \frac{x}{1-e^{-x}}\right)$

2. En déduire que : $(\forall x > 0)(1-x \prec e^{-x})$ et que

$(\forall x > 0)(1+x \prec e^{x})$

3. En déduire que : $(\forall x > 0)\left(0 \prec \ln\left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right) \prec x\right)$

Partie 2

Considérons la fonction f définie sur [0, +∞[

Par : $f(x) = \frac{xe^x}{e^x-1}$ Si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$

1) Etudier la continuité de la fonction f sur [0, +∞[.

2) Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$ et étudier la branche infinie de la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.
3) a) Montrer que $(\forall x > 0)$

$$\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6} \prec e^{-x}+x-1 \prec \frac{x^2}{2}\right)$$

b) Montrer que $(\forall x > 0)$ $\left(\frac{f(x)-1}{x}=\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}\cdot f(x)\right)$

c) En déduire que f est dérivable à droite de 0 et donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.

4) a) Montrer que : $(\forall x > 0)$ $\left(f'(x)=\frac{e^x\left(e^x-x-1\right)}{\left(e^x-1\right)^2}\right)$

b) En déduire que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Dresser le tableau de variation de f.
c) Construire la courbe C_f.
d) Montrer que f est une bijection de $[0, +\infty[$
Vers $J = f([0, +\infty[)$.

<u>Partie 3 :</u>Considérons la suite $(u_n)_n$ définie par :

$u_0 \in]0, +\infty[$ et $(\forall n \in \mathbb{N})(u_{n+1}=\ln(f(u_n)))$.

1) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est strictement positive,

2) Montrer que la suite $(u_n)_n$ strictement décroissante, puis en déduire qu'elle est convergente.
3) a) Montrer que l'équation $ln(f(x)) = x$ admet 0 comme seule solution.

b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_n$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien