

➤ **Définition :**

Soit n un entier naturel non nul

La fonction $x \mapsto x^n$ est continue et strictement monotone sur l'intervalle $[0; +\infty[$

elle admet une fonction réciproque définie sur $[0; +\infty[$, nommée racine n-ième

et que l'on note $\sqrt[n]{}$ et on a : $\forall (x; y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$

➤ **Propriétés:**

$\forall (x; y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

- $\sqrt[n]{x^n} = x$
- $(\sqrt[n]{x})^n = x$
- $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$
- $\sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x > y$

$\forall (x; y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \forall (m; n) \in (\mathbb{N}^*)^2$

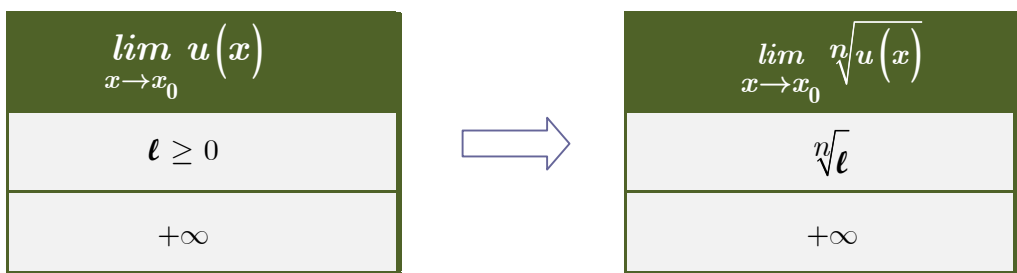
- $\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \times y}$
- $(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$
- $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}} \quad (y \neq 0)$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n \times m]{x}$
- $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n \times m]{x^m}$

➤ **Ensemble de définition :**

L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est :

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ et } u(x) \geq 0 \right\}$$

➤ **Limites:**



Ces résultats restent valable, à droite en x_0 , à gauche en x_0 , en $+\infty$ et en $-\infty$

➤ **Continuité :**

Si f une fonction définie, positive et continue sur un intervalle I

alors la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est continue sur I

➤ **Dérivée :**

Si u une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I
alors la fonction : $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est dérivable sur I

et on a : $\forall x \in I \quad \left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{n\sqrt[n]{u(x)}^{n-1}}$

➤ **Résolution de l'équation** $x \in \mathbb{R} \quad x^n = a \quad (a \in \mathbb{R}) :$

	n un entier naturel impair	n un entier naturel pair non nul
$a > 0$	$S = \{\sqrt[n]{a}\}$	$S = \{-\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{a}\}$
$a = 0$	$S = \{0\}$	$S = \{0\}$
$a < 0$	$S = \{-\sqrt[n]{ a }\}$	$S = \emptyset$

➤ **Puissance rationnelle d'un nombre réel strictement positif:**

Soit un x réel strictement positif et un r nombre rationnel

On pose $r = \frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$)

On a : $x^r = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$

➤ **Remarques :**

- $\sqrt[n]{u(x)} = (u(x))^{\frac{1}{n}}$
- $\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \left((u(x))^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} \times (u(x))' \times (u(x))^{\frac{1}{n}-1}$

Pour tous réels x et y positifs et pour tous rationnelles r et r'

- $x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$
- $\left(x \times y\right)^r = x^r \times y^r$
- $\frac{1}{x^r} = x^{-r}$
- $\left(x^r\right)^{r'} = x^{r \times r'}$
- $\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$
- $\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}$