

TD-ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Exercices d'application et de réflexions

Exercice1 :1)Ecrire en extension les ensembles suivants : $D_{180} = \{n \in \mathbb{N} / n/180\}$

$$A = \left\{ n \in \mathbb{Z} / \frac{-5}{2} \leq n^2 \leq \frac{3}{2} \right\} ;$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x + 1 = 0\}$$

2)Ecrire en compréhension l'ensemble Des nombres pairs

Exercice2 :1) Ecrire en extension les ensembles suivants :

$$E_1 = \{k \in \mathbb{Z} / |k+1| \leq 2\}$$

$$E_2 = \{x \in \mathbb{Z} / k^2 \leq 7\}$$

$$E_3 = \{k \in \mathbb{Z} / 7 \leq k^2 \leq 35\}$$

$$E_4 = \{(x; y) \in \mathbb{N}^2 / (x+y)(x-y) = 32\}$$

$$E_5 = \{(x; y) \in \mathbb{N}^2 / x^2 - y^2 = 15\}$$

$$E_6 = \{(x; y) \in \mathbb{Z}^2 / 0 < 2xy \leq 7\}$$

$$E_7 = \left\{ x \in \mathbb{Z}^* / (\forall n \in \mathbb{N}) \frac{1}{x} \geq \frac{n}{n+1} \right\}$$

$$E_8 = \{x \in \mathbb{Z} / (\forall n \in \mathbb{N}) x^2 \leq 4 + n^3\}$$

$$E_9 = \{(x; y) \in \mathbb{N}^2 / 0 < 2x \leq y \leq 5\}$$

$$E_{10} = \left\{ x \in \mathbb{Q} / x = \frac{p}{q} \text{ et } p; q \in \mathbb{N}^* \text{ Vérifiant } p \leq 3q \leq 11 \right\}$$

2)Ecrire en compréhension l'ensemble Des multiples de 5 dans \mathbb{N}

Exercice3 : Ecrire en extension les ensembles

$$\text{suivants : } A = \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{5} + \frac{n\pi}{6} \right) : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$B = \left\{ \sin \left(\frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{6} \right) : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Exercice4 : $A = \{k \in \mathbb{Z} / |2k+1| \leq 3\}$ et $B =$

$\{-2, -1, 0, 1\}$

Montrons que : $A = B$

Exercice5 : Soit $E = \{0; 1; 2\}$ déterminer tous les ensembles inclus dans E. Qui s'appelle l'ensemble des parties de E et se note $\mathcal{P}(E)$.

Exercice6 : Ecrire en extension les ensembles suivants : 1) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$ 2) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a; b\}))$

Exercice7 : donner Complémentaire des ensembles suivants : $[a; b[$ l'ensemble \mathbb{Q}

2) l'intervalle $[a; b[$ $a < b$

Exercice8 : Soient les ensembles :

$$A = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2 \frac{k\pi}{5} : k \in \mathbb{Z} \right\} \quad B = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2 \frac{k\pi}{5} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Monter que : $A \cap B = \emptyset$

Exercice9 : Soient $A ; B ; C$ et D des parties d'un ensemble E

$$\text{Monter que : } \begin{cases} (\overline{B-C}) \cup A = E \\ (\overline{C-D}) \cup A = E \end{cases} \Rightarrow (B-D) \subset A$$

Exercice10 : Soient $A ; B ; C$ des ensembles

Monter que : $A \subset B \subset C \Leftrightarrow A \cup B = B \cap C$

Exercice11 : Soient $A ; B ; C$ des parties d'un ensemble E

Monter que :

$$1) A = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap \overline{C})$$

$$2) (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$$

$$3) A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \Leftrightarrow A \cap B = A \cap C$$

Exercice12 : Soient $A ; B ; C$ des parties d'un ensemble E

$$\text{Monter que : } \begin{cases} A \cup B \subset A \cup C \\ A \cap B \subset A \cap C \end{cases} \Rightarrow B \subset C$$

Exercice13 : Soient $A ; B ; C$ des parties d'un ensemble E

La différence symétrique de A et B c'est l'ensemble Qu'on note : $A \Delta B$ tel que : $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

$$1) \text{Monter que : } A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$2) \text{Monter que : } \overline{A \Delta B} = A \Delta B$$

$$3) \text{Monter que : } \forall C \in \mathcal{P}(E) : A \Delta B = A \Delta C \Leftrightarrow B = C$$

Exercice14 : Soit l'ensemble :

$$E = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + xy - 2y^2 + 5 = 0\}$$

1) a) vérifier que :

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + xy - 2y^2 = (x - y)(x + 2y)$$

b) Ecrire en extension l'ensemble $E \cap \mathbb{Z}^2$

c) montrer que : $E = \left\{ \left(\frac{2t^2 - 5}{3t}; \frac{-t^2 - 5}{3t} \right) / t \in \mathbb{R}^* \right\}$

4) Ecrire en compréhension les ensembles suivants :

$$A = \{0; 1; 4; 9; 16; \dots\} \text{ et } B = \left\{ -1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots \right\}$$

$$C = \{\dots; -5; -2; 1; 4; 7; \dots\}$$

Exercice15 : soient E et F deux ensembles et A et B deux parties respectives de E et F

1) déterminer le complémentaire de $A \times F$ dans $E \times F$

2) déterminer le complémentaire de $E \times F$ dans $E \times F$

3) déterminer le complémentaire de $A \times B$ dans $E \times F$

Exercice17 : soient l'ensemble :

$$L = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Montrer qu'il n'existe pas deux parties A et B de \mathbb{R} tels que : $L = A \times B$

Exercice18 : Soient les ensembles :

$$H = \left\{ y \in \mathbb{R} / y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$G = \left\{ y \in \mathbb{R} / y = \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + 1}} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

1- montrer que : $H =]0, 1]$.

a- Considérer un élément $y_0 \in H$

et montrer que $y_0 \in]0, 1]$

b- Considérer un élément $y_0 \in]0, 1]$

et montrer que $y_0 \in H$

2- Montrer que $G \subset H$

3- Est-ce que $G = H$?

Exercice19 : soit a un nombre réel on considère les deux ensembles suivants :

$$E = \{x \in \mathbb{Z} / |x+1| \leq 3\} \text{ et } F = \{x \in \mathbb{Z} / |2x-a| \leq 4\}$$

1) Ecrire E en extension

2) déterminer les valeurs possibles de a pour lesquelles $E \cap F = \emptyset$

3) déterminer les valeurs possibles de a pour lesquelles $\mathbb{N} \cap F = \emptyset$

4) déterminer les valeurs possibles de a pour lesquelles $F \subset \mathbb{N}$

Exercice20 : on considère dans \mathbb{Z} les deux parties suivantes :

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} / \frac{4x^2 - 4x + 10}{2x - 1} \in \mathbb{Z} \right\} \text{ et } B = \left\{ x \in \mathbb{Z} / \frac{x + 10}{x - 5} \in \mathbb{Z} \right\}$$

1) a) montrer que $(\forall x \in \mathbb{Z} - \{5\}) \frac{x + 10}{x - 5} = 1 + \frac{15}{x - 5}$

1) b) montrer que $(\forall x \in \mathbb{Z}) \frac{4x^2 - 4x + 10}{2x - 1} = 2x - 1 + \frac{9}{2x - 1}$

2) déterminer : A ; B ; $A - B$; $B - A$ et $A \Delta B$ en extension

3) on admet que l'opération est associative dans l'ensembles des parties de \mathbb{Z} : $P(\mathbb{Z})$

Résoudre dans $P(\mathbb{Z})$ l'équation : $A \Delta X = B$

Exercice21 : Soient les ensembles :

$$E = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - xy - 2y^2 = 0\}$$

$$F = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0\}$$

1) montrer que : $F \subset E$

2) déterminer y de \mathbb{R} tel que : $(1; y) \in E$; est ce que on a $E \subset F$?

3) montrer que : $E = F \cup G$ ou G est un ensemble à déterminer

4) Soient les ensembles :

$$A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = x + 1 + \sqrt{x^2 + 1} = 0\}$$

$$B = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = x + 1 - \sqrt{x^2 + 1} = 0\}$$

a) montrer que : $H = A \cup B$

b) déterminer : $H \cap F$

Exercice22 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E

1) a) déterminer une condition suffisante de

l'existence de X dans $P(E)$ tel que : $A \cup X = B$

b) résoudre dans $P(E)$ l'équation : $A \cup X = B$

2) on suppose que $C \subset A \subset B$

résoudre dans $P(E)$ le système : $\begin{cases} A \cup X = B \\ A \cap X = C \end{cases}$

Exercice23 : soit les 2 applications :

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \quad g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$n \mapsto (-1)^n \quad \text{et} \quad n \mapsto \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$$

Est-ce que $f = g$?

Exercice24 : soit l'application : $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$x \mapsto x + \sqrt{x}$$

f est-elle injective ?

Exercice25: soit l'application : $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2 - 1$
 g est-elle injective ?

$$f : \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$$

Exercice26 : 1) $x \mapsto \frac{3x+1}{x-2}$

Montrer que f est injective

2) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2 + 4$ g est-elle injective ?

$$h : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}$$

2) $n \mapsto 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

1- déterminer les images des entiers 1, 2, 3

2- Montrer que $n > m \Rightarrow h(n) > h(m)$

3- En déduire que h est injective.

Exercice27 : soit l'application : $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow]-\infty; 3]$
 $x \mapsto 3 - x^2$

f est-elle surjective de \mathbb{R}^+ vers $]-\infty; 3]$.

Exercice28 : soit l'application : $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 3 - x^2$

f est-elle surjective de \mathbb{R}^+ vers \mathbb{R} ?

$$f : \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$$

Exercice29 : 1) $x \mapsto \frac{3x+1}{x-2}$

a- f est-elle surjective de $\mathbb{R} - \{2\}$ vers \mathbb{R} .

b- Modifier l'ensemble d'arrivée pour définir une application surjective.

2) $f : \mathbb{R} \rightarrow [2; +\infty[$
 $x \mapsto x^2 - 2x + 3$

a- Montrer que la fonction g est surjective.

b- g est-elle injective ?

$$h : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q} \cap [1; +\infty[$$

3) $n \mapsto 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

h est-elle surjective ?

Exercice30 : soit l'application : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 2 - 5x$

f est-elle une bijection de \mathbb{R} vers \mathbb{R} ?

Exercice31 : $f : [1; +\infty[\rightarrow [2; +\infty[$
 $x \mapsto x^2 - 2x + 3$

1- Montrer que f est une bijection de $[1; +\infty[$ vers $[2; +\infty[$.

2- Soit y un élément de $[2; +\infty[$, déterminer (en fonction de y) l'élément x dans $[1; +\infty[$ tel que $f(x) = y$

L'application qui lie l'élément y de $[2; +\infty[$, à l'élément unique x de $[1; +\infty[$ et solution de l'équation $f(x) = y$ s'appelle : la bijection réciproque de la bijection f et se note : f^{-1}

$$f :]1; +\infty[\rightarrow]0; +\infty[$$

Exercice32 : soit l'application : $x \mapsto \frac{2}{x-1}$

Montrer que f est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice33 : Déterminer la fonction réciproque de la fonction $f : [1; +\infty[\rightarrow [2; +\infty[$
 $x \mapsto x^2 - 2x + 3$

Exercice34 : Soit la fonction g définie par :

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$$

Montrer que g est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice35 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 2x^2 - x$

1- Montrer que $\forall x \in [-1; 1] \quad f(x) \in \left[\frac{-3}{16}; 3 \right]$

2- Montrer que : $\forall y \in \left[\frac{-3}{16}; 3 \right] \exists x \in [-1; 1] / (f(x) = y)$

on dit que l'image de l'intervalle $[-1; 1]$ par

l'application f est l'intervalle $\left[\frac{-3}{16}; 3 \right]$ et on écrit :

$$f([-1; 1]) = \left[\frac{-3}{16}; 3 \right]$$

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Exercice36 : Soit $(x; y) \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2}$

1- Déterminer les couples (x,y) qui vérifient

$$h((x,y)) = 1$$

2- Représenter dans le plan muni d'un repère

orthonormé les points M (x, y) qui vérifient

$$h((x, y)) = 1.$$

$$f : \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

Exercice37 : soit l'application : $x \mapsto \frac{3x-1}{x+1}$

1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\} \quad f(x) = 3 - \frac{4}{x+1}$

2) Déterminer : $f(K)$ avec $K =]-\infty; -1[$

Exercice38 : soit l'application : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$

Déterminer : $f^{-1}(B)$ avec $B = [-1; 4]$

Exercice39 : soit l'application : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \cos x$

Déterminer : $f^{-1}(D)$ avec $D =]1; 2]$

Exercice40 : Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{3}{1+x^2} \quad \text{déterminer } f^{-1}([1; 2]) \quad f^{-1}([1; 2])$$

Exercice41 : Soit l'application :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 3|1-x^2| + x \quad \text{Ecrire l'expression de } f \text{ sur } [-1; 1]$$

Exercice42 : Soit l'application

$$g : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{3x+1}{x-1} \quad 1-g \text{ est-elle bijective ?}$$

2- A partir de g , définir une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R}

Exercice43 : soit l'application : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x + 1}$

Déterminer la restriction de f sur l'intervalle $] -\infty; 1]$

Exercice44 : soit l'application : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 2x - |x| + 3$

Déterminer la restriction de f sur l'intervalle $] -\infty; 0]$

Exercice45 : soit les applications :

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \quad \text{et} \quad x \mapsto 2|x| - x$$

Est-ce que g est un prolongement de f ?

Exercice46 : 1) Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall m \in \mathbb{Z})(E(m+x) = m + E(x)).$$

2) Vérifier par un contre-exemple que :

$$E(x+y) \neq E(x) + E(y)$$

3) Soit l'application $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto E(3x+1) + x$

1- Vérifier que h n'est pas injective.

2- Donner la restriction de h sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{3}\right]$.

3- Déterminer : $h^{-1}\{4\}$ et $h^{-1}\{2\}$; h est-elle surjective ?.

Exercice47 : Soient les deux applications :

$$f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad g : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{x}{x-1}$$

1- Déterminer $f(g(3))$; $f(g(-1))$ $g(f(3))$

2- Donner la condition sur x pour que le réel $g(f(x))$ existe.

3- Donner la condition sur x pour que le réel $f(g(x))$ existe.

4- Déterminer les application $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice48 : soit l'application : $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$
 $x \mapsto x + \sqrt{x} + \frac{1}{4}$

1) Ecrire l'application h comme la composée de deux applications f et g : $h = g \circ f$

2) a) Montrer que f est une bijection et déterminer sa bijection réciproque

b) Montrer que g est une bijection et déterminer sa bijection réciproque

c) en déduire que h est une bijection de \mathbb{R}^+ dans

$\left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$ et déterminer sa bijection réciproque

Exercice49 : soient les applications :

$$f :]1; +\infty[\rightarrow]1; +\infty[\quad g :]1; +\infty[\rightarrow]1; +\infty[\\ x \mapsto 1 + \frac{2}{\sqrt{x}-1} \quad \text{et} \quad x \mapsto \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)^2$$

1) Déterminer : $f([2; 4[)$ et $g^{-1}(\{9\})$

2) Montrer que f est une bijection de $]1; +\infty[$ dans $]1; +\infty[$ et déterminer sa bijection réciproque

3) a) vérifier que : $\forall x \in]1; +\infty[: g(x) = (f(x))^2$

3) b) en déduire que : g est une bijection de $]1; +\infty[$ dans $]1; +\infty[$ et déterminer sa bijection réciproque

Exercice50 : Soient les ensembles :

$$E = \{x \in]-\pi; 2\pi[/ \tan x = \sqrt{3} : x \in \mathbb{R}\}$$

$$F = \left\{x \in]-\pi; 2\pi[/ x = \frac{\pi}{6} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$G = \left\{x \in]-\pi; 2\pi[/ x = \frac{\pi}{6} + \frac{k}{2}\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$S = \left\{\frac{-5\pi}{3}; \frac{-\pi}{3}; \frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{6}; \frac{5\pi}{3}\right\}$$

Vérifier que : $S \subseteq E$ et $E \subseteq S$ et que $E = S$ et $E = G$

Vérifier que : $\frac{\pi}{8}$ n'est pas un élément de E et que

$$E \neq F$$

Exercice51 : Soient $A = \left\{\frac{5n+8}{8n-1} / n \in \mathbb{N}\right\}$ et

$$B = \left\{\frac{2n+4}{2n-1} / n \in \mathbb{N}\right\}$$

1- Est ce que : $\frac{17}{3} \in A$? $\frac{43}{25} \in B$? $\frac{42}{37} \in B$?

2- montrer que $\frac{6}{5}$ est un élément commun entre A et B .

Exercice52 : Soit la fonction f définie par :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$$

$$\bar{A} = \{x \in E / x \notin A\}$$

1-Montrer que chaque élément de \mathbb{R} à une image.

2- l'implication suivante est-elle vraie :

(P) $(a \neq b) \Rightarrow (f(a) \neq f(b))$.

3-Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$

4- Montrer que $(\forall y \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]) (\exists x \in \mathbb{R})(f(x) = y)$

Exercice53 Soient les deux applications suivantes :

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \quad g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$$
$$n \mapsto (-1)^n \times n \quad \text{et} \quad n \mapsto \begin{cases} n. \text{si } n. \text{pair} \\ -n. \text{si } n. \text{impair} \end{cases}$$

Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N})(f(n) = g(n))$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

