Les applications

Exercice 1 Soit l'application f définie de $]-2,2[$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{|x|}{\sqrt{4-x^2}}$

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. soit g la restriction de f sur $I=]-2,0]$

a) montrer que g est injective

b) montrer que g est une bijection de I vers $\mathbb{R}^+$ et définir sa réciproque g^{-1}

Exercice 2 On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x}{|x|+1}$

1) montrer que f est injective

2) montrer que $(\forall x\in\mathbb{R})$: $|f(x)|<1$ f est-elle surjective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$?

3) montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1[$ puis définir sa réciproque f^{-1}

Exercice 3 Soit l'application f définie sur $]-\infty,-1]$ par : $f(x)=x\sqrt{x^2-1}$

1) a) montrer que f est strictement croissante sur $]-\infty,-1]$

b) déduire que f est injective

2) f est-elle surjective de $]-\infty,-1]$ vers $\mathbb{R}$?

3) montrer que f est une bijection de $]-\infty,-1]$ vers $]-\infty,0]$ et déterminer sa réciproque

Exercice 4 Soit l'application f définie de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sqrt{x^2+x}-x$

① montrer que f est injective

② montrer que $(\forall x\in\mathbb{R}) : 0\le f(x)<\dfrac{1}{2}$ f est-elle surjective ?

③ montrer que f est bijective de $\mathbb{R}^+$ vers $\left[0,\dfrac{1}{2}\right[$ puis définir sa réciproque

Exercice 5 Soit f l'application définie de $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$

1) montrer que $(\forall x\in\mathbb{R})$ $\sqrt{x^2+1}>x$

2) a) montrer que $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)$ $f(x)-f(y)=(x-y)\left(\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}-1\right)$

b) en déduire que f est injective

3) f est-elle surjective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$?

4) montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^{+*}$ et déterminer sa bijection réciproque

Exercice 6 Soit f l'application définie de $]0,+\infty[$ vers $[2,+\infty[$ par : $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

1) a) montrer que $(\forall x>0)$ $f(x)>2$

b) En déduire que f est surjective

c) f est-elle injective ?

2) Déduire que f est bijective puis déterminer sa réciproque

Les applications

3) On considère l'application g définie de $]-3,+\infty[$ vers $[2,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{x^2+6x+10}{x+3}$

a) Montrer que $(\forall x>-3)\quad g(x)=f(x+3)$

b) Déduire que g est une bijection en déterminant sa réciproque

Exercice 7

On considère l'application f définie de $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ par : $f((x,y))=(x^2-y^2,xy)$

1) soit (a,b) un élément de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$

a) Montrer que l'équation $x^2-ax-b^2=0$ admet deux solutions distincts β ; α

b) montrer que β ; α ont des signes opposés

2) f est-elle injective ? surjective ? justifier votre réponse

Exercice 8

Soit f une application de E vers F . A et B deux parties de E

1) Montrer que : $A\subseteq B \Rightarrow f(A)\subseteq f(B)$

2) Montrer que : $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$

3) a) montrer que : $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$

b) Donner une application f telle que : $f(A\cap B)\neq f(A)\cap f(B)$

c) montrer que si f est injective alors $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$

Exercice 9

E un ensemble non vide , A une partie de E .

Soit f l'application définie de $P(E)$ vers $P(A)\times P(\overline{A})$ par $f(x)=(A\cap X, X\cap\overline{A})$

☺ soit (X,Y) un élément de $P(A)\times P(\overline{A})$ déterminer $f(X\cup Y)$

☺ montrer que f est une bijection

☺ on considère l'application g définie de $P(A)\times P(\overline{A})$ vers $P(A)\times P(\overline{A})$ par :

$$g(X,Y)=(A-X,\overline{A}-Y)$$

Montrer que $f(X)=g\circ f(\overline{X})$ en déduire que g est surjective

Exercice 10

Soit f l'application définie de $I=\mathbb{R}-\{0,1\}$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$(\alpha)\qquad (\forall x\in I)\quad f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=x+1$$

1) on pose $g(x)=\dfrac{x-1}{x}$ pour tout x de I

a) Vérifier que $(\forall x\in I)\quad g(x)\in I$ et calculer $(g\circ g)(x)$

b) déterminer $(g\circ g\circ g)(x)$

2) a) montrer que $(\forall x\in I)\quad f(x)+f((g\circ g)(x))=\dfrac{-1}{x-1}+1$

b) calculer $f(g(x))+f((g\circ g)(x))$ en fonction de x

c) en déduire les applications f qui vérifient la relation (α)