

## ENSEMBLES ET APPLICATIONS

### 1) LES ENSEMBLES :

#### 1-1) Activités :

**Activité 1 :** Soient les ensembles :

$$E = \left\{ x \in ]-\pi; 2\pi[ / \tan x = \sqrt{3} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$F = \left\{ x \in ]-\pi; 2\pi[ / x = \frac{\pi}{6} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$G = \left\{ x \in ]-\pi; 2\pi[ / x = \frac{\pi}{6} + \frac{k}{2}\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$S = \left\{ \frac{-5\pi}{3}; \frac{-\pi}{3}; \frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{6}; \frac{5\pi}{3} \right\}$$

Vérifier que :  $S \subseteq E$  et  $E \subseteq S$  et que  $E = S$  et  $E = G$

Vérifier que:  $\frac{\pi}{8}$  n'est pas un élément de E

et que  $E \neq F$

#### Activité 2 :

Soient  $A = \left\{ \frac{5n+8}{8n-1} / n \in \mathbb{N} \right\}$  et  $B = \left\{ \frac{2n+4}{2n-1} / n \in \mathbb{N} \right\}$

1- Est ce que :  $\frac{17}{3} \in A$  ?  $\frac{43}{25} \in B$  ?  $\frac{42}{37} \in B$  ?

2- montrer que  $\frac{6}{5}$  est un élément commun entre A et B.

#### 1-2) VOCABULAIRES :

- Un ensemble E est une collection d'objets mathématiques. Les objets que l'ensemble contient sont appelés éléments de E.

- Si x est un élément de E on dit que x appartient à E et on écrit :  $x \in E$

- $\emptyset$  est l'ensemble qui ne contient aucun élément, on peut le définir comme suite :  $\{x \in E \text{ et } x \notin E\}$ .

- Un ensemble peut être défini **en extension**, c'est-à-dire en donnant la liste de ses éléments entre accolades.

*Par exemple :* L'ensemble V des voyelles de l'alphabet français en extension est :

$$V = \{a, e, i, o, u, y\}$$

- En compréhension c'est-à-dire par une propriété caractérisant ses éléments.

*Par exemple :*  $E = \{k \in \mathbb{Z} / |3k + 1| \leq 5\}$

#### Exemples :

1) L'ensemble des diviseurs de 3 en extension est :  $D_3 = \{1; 3\}$

L'ensemble des diviseurs de 3 en compréhension

$$\text{est : } D_3 = \{n \in \mathbb{N} / n/3\}$$

2) L'ensemble A des entiers naturels dont les carrés sont inférieurs ou égaux à 40 :

$$A = \{n \in \mathbb{N} / n^2 \leq 40\} \quad (\text{en compréhension})$$

$$A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\} \quad (\text{en extension})$$

**Exercice1 :** 1) Ecrire en extension les ensembles suivants :  $D_{180} = \{n \in \mathbb{N} / n/180\}$

$$A = \left\{ n \in \mathbb{Z} / \frac{-5}{2} \leq n^2 \leq \frac{3}{2} \right\};$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x + 1 = 0\}$$

2) Ecrire en compréhension l'ensemble Des nombres pairs

**Solution : 1)**  $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

$$D_{180} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 9; 10; 12; 15; 18; 20; 30; 36; 45; 60; 90; 180\}$$

$$A = \{-1; 0; 1\}$$

$$x^2 + x + 1 = 0 \quad \Delta = -3 < 0 \text{ donc : } B = \emptyset$$

2)  $P = \{2k / k \in \mathbb{N}\}$

**Exercice2 :** 1) Ecrire en extension les ensembles suivants :

$$E_1 = \{k \in \mathbb{Z} / |k+1| \leq 2\}$$

$$E_2 = \{x \in \mathbb{Z} / k^2 \leq 7\}$$

$$E_3 = \{k \in \mathbb{Z} / 7 \leq k^2 \leq 35\}$$

$$E_4 = \{(x; y) \in \mathbb{N}^2 / (x+y)(x-y) = 32\}$$

2) Ecrire en compréhension l'ensemble Des multiples de 5 dans  $\mathbb{N}$

**Solution : 1)**  $k \in E_1 \Leftrightarrow k \in \mathbb{Z} \text{ et } |k+1| \leq 2 \Leftrightarrow$

$$k \in \mathbb{Z} \text{ et } -2 \leq k+1 \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$k \in \mathbb{Z} \text{ et } -3 \leq k \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\text{Donc : } E_1 = \{-3; -2; -1; 0; 1\}$$

$$k \in E_2 \Leftrightarrow k \in \mathbb{Z} \text{ et}$$

$$k^2 \leq 7 \Leftrightarrow |k| \leq \sqrt{7} \Leftrightarrow -\sqrt{7} \leq k \leq \sqrt{7} \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc : } E_2 = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$$

$$k \in E_3 \Leftrightarrow k \in \mathbb{Z} \text{ et } 7 \leq k^2 \leq 35$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{7} \leq |k| \leq \sqrt{35} \Leftrightarrow |k| \in \{3; 4; 5\} \Leftrightarrow k \in \{-5; -4; -3; 3; 4; 5\}$$

$$\text{Donc : } E_3 = \{-5; -4; -3; 3; 4; 5\}$$

$$E_4 = \{(x; y) \in \mathbb{N}^2 / (x+y)(x-y) = 32\} ?$$

Et  $(x-y) + (x+y) = 2x$  est un nombre pair

Donc  $x-y$  et  $x+y$  ont la même parité et

$$x+y \geq x-y \quad 32 = 2^5$$

On dresse un tableau :

$x-y$	2	4
$x+y$	16	8
$x$	9	6
$y$	7	2

$$E_4 = \{(6; 2); (9; 7)\}$$

$$E_5 = \{(x; y) \in \mathbb{N}^2 / x^2 - y^2 = 15\} ?$$

$$x^2 - y^2 = 15 \Leftrightarrow (x+y)(x-y) = 15$$

De même que :  $E_4$  on a : les diviseurs de 15

sont 1 ; 3 ; 5 ; 15 et  $x+y \geq x-y$

On dresse un tableau :

$x-y$	1	3
$x+y$	15	5
$x$	8	4
$y$	7	1

$$2) P = \{5k / k \in \mathbb{N}\}$$

**Exercice3** : Ecrire en extension les ensembles

$$\text{suivants : } A = \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{5} + \frac{n\pi}{6}\right) : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$B = \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{6}\right) : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

**Solution** : on sait que la fonction cos est périodique

$$\text{de période } 2\pi \text{ et } \frac{n\pi}{6} = 2\pi \Leftrightarrow n = 12$$

$$n \in \{0; 1; 2; 3; \dots; 11\}$$

$$A = \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{5} + \frac{n\pi}{6}\right) / n \in [0; 11] \right\}$$

En tenant compte des relations :

$$\cos(\pi + x) = \cos(\pi - x) = -\cos x \text{ on en déduit :}$$

$$A = \left\{ \cos\left(\frac{6\pi}{30}\right); \cos\left(\frac{11\pi}{30}\right); \cos\left(\frac{16\pi}{30}\right); \cos\left(\frac{21\pi}{30}\right) \right\}$$

$$; \cos\left(\frac{26\pi}{30}\right); \cos\left(\frac{31\pi}{30}\right); \cos\left(\frac{36\pi}{30}\right); \cos\left(\frac{41\pi}{30}\right); \cos\left(\frac{46\pi}{30}\right)$$

$$; \cos\left(\frac{51\pi}{30}\right); \cos\left(\frac{56\pi}{30}\right); \cos\left(\frac{61\pi}{30}\right) \}$$

$$\text{De même pour sin on a : } B = \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{6}\right) : n \in [0; 11] \right\}$$

En tenant compte des relations :

$$\sin(\pi - x) = \sin x = -\sin(\pi + x) = -\sin(-x)$$

on en déduit :

$$B = \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right); \sin\left(\frac{3\pi}{12}\right); \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right); -\sin\left(\frac{\pi}{12}\right); -\sin\left(\frac{3\pi}{12}\right); -\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right\}$$

## **2) Egalité ; inclusion ; ensemble des parties d'un ensemble**

**Définition** : On dit que deux ensembles  $E$  et  $F$  sont égaux s'ils ont exactement les mêmes éléments ; on écrit  $E = F$

$$(E = F) \Leftrightarrow (x \in E \Leftrightarrow x \in F)$$

$$\text{Exemple : } A = \{k \in \mathbb{Z} / |2k+1| \leq 3\} \text{ et } B = \{-2, -1, 0, 1\}$$

Montrons que :  $A = B$

$$\text{Solution : } k \in A \Leftrightarrow k \in \mathbb{Z} \text{ et } |2k+1| \leq 3 \Leftrightarrow$$

$$k \in \mathbb{Z} \text{ et } -3 \leq 2k+1 \leq 3 \Leftrightarrow$$

$$k \in \mathbb{Z} \text{ et } -4 \leq 2k \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$k \in \mathbb{Z} \text{ et } -2 \leq k \leq 1 \Leftrightarrow k \in \{-2; -1; 0; 1\} \Leftrightarrow k \in B$$

Donc on a :  $k \in A \Leftrightarrow k \in B$

Donc :  $A = B$

**Définition** : Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles quelconques.  $E$  est dit inclus dans  $F$  si tout élément de  $E$  est un élément de  $F$ .

On dit aussi que  $E$  est un sous-ensemble de  $F$  ou encore que  $E$  est une partie de  $F$ . On note  $E \subset F$  ( $E \subset F$ )  $\Leftrightarrow (x \in E \Rightarrow x \in F)$ .

**Exemple** : Soit  $E = \{0; 1; 2\}$  déterminer tous les ensembles inclus dans  $E$ . Qui s'appelle l'ensemble des parties de  $E$  et se note  $\mathcal{P}(E)$ .

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset; \{0\}; \{1\}; \{2\}; \{0; 1\}; \{0; 2\}; \{1; 2\}; E\}$$

**Définition** : Soit  $E$  un ensemble, les parties de  $E$ , constituent un ensemble qui s'appelle ensemble des parties de  $E$  et se note  $\mathcal{P}(E)$ .

$$\mathcal{P}(E) = \{X / X \subset E\}$$

**Remarques** : 1)  $A$  est une partie de  $E$  ( $A \subset E$ ) si et seulement si  $A$  est un élément de  $\mathcal{P}(E)$

$$A \subseteq E \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}(E)$$

$$2) \emptyset \in \mathcal{P}(E) \text{ et } \emptyset \subset E \quad 3) E \in \mathcal{P}(E) \text{ et } E \subset E$$

**Exercice4** : Ecrire en extension les ensembles suivants :

$$1) \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) \quad 2) \mathcal{P}(\{\{a; b\}\})$$

**Solution** : 1) Il est aisé de voir que  $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

$$\text{donc : } \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset; \{\emptyset\}\}$$

$$2) \mathcal{P}(\{\{a; b\}\}) :$$

$$\mathcal{P}(\{a; b\}) = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{a; b\}\} \text{ Donc :}$$



**Solution :** On suppose que :  $A \cap B \neq \emptyset$

Donc :  $\exists x_0 \in \mathbb{R} \quad x_0 \in A \text{ et } x_0 \in B$

$$\Leftrightarrow \exists (k_1; k_2) \in \mathbb{Z}^2 : x_0 = \frac{\pi}{2} + 2\frac{k_1\pi}{5} \text{ et } x_0 = \frac{\pi}{4} + 2\frac{k_2\pi}{5}$$

$$\text{Donc } \Leftrightarrow \exists (k_1; k_2) \in \mathbb{Z}^2 : \frac{\pi}{2} + 2\frac{k_1\pi}{5} = \frac{\pi}{4} + 2\frac{k_2\pi}{5}$$

$$\text{Donc : } \frac{2}{5}(k_1 - k_2) = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow k_1 - k_2 = -\frac{5}{8} \text{ contradiction}$$

avec le fait que  $k_1 - k_2 \in \mathbb{Z}$  et  $-\frac{5}{8} \notin \mathbb{Z}$  Donc :  $A \cap B = \emptyset$

**Exercice7 :** Soient  $A ; B ; C$  et  $D$  des parties d'un ensemble  $E$

$$\text{Monter que : } \begin{cases} (\overline{B-C}) \cup A = E \\ (\overline{C-D}) \cup A = E \end{cases} \Rightarrow (B-D) \subset A$$

**Solution :** On suppose que :

$$(\overline{B-C}) \cup A = E \text{ et } (\overline{C-D}) \cup A = E$$

Remarque que :  $A \cup B = E \Rightarrow \overline{A} \subset B$

Donc :  $B-C \subset A$  et  $C-D \subset A$  cad

$$B \cap \overline{C} \subset A \text{ et } C \cap \overline{D} \subset A$$

Montrons que :  $B-D \subset A$  cad  $B \cap \overline{D} \subset A$  ?

Soit  $x \in B \cap \overline{D}$

$$x \in B \cap \overline{D} \Leftrightarrow x \in B \text{ et } x \in \overline{D}$$

- Si  $x \in C$  alors  $x \in C \cap \overline{D}$  donc  $x \in A$  car  $C \cap \overline{D} \subset A$
- Si  $x \notin C$  alors  $x \in B \cap \overline{C}$  donc  $x \in A$  car  $B \cap \overline{C} \subset A$

Dans tous les cas :  $(B-D) \subset A$

**Exercice8 :** Soient  $A ; B ; C$  des ensembles

Monter que :  $A \subset B \subset C \Leftrightarrow A \cup B = B \cap C$

**Solution :** On suppose que :  $A \subset B \subset C$

On a :  $A \subset B \subset C \Rightarrow A \subset B$  et  $B \subset C$

$$\Rightarrow A \cup B = B \text{ et } B \cap C = B \Rightarrow A \cup B = B \cap C$$

On suppose que :  $A \cup B = B \cap C$

On a :  $A \cup B = B \cap C \Rightarrow A \cup B \subset B$  et  $A \cup B \subset C$

$$\Rightarrow A \subset B \text{ et } B \subset C$$

$$\Rightarrow A \subset B \subset C$$

Donc :  $A \subset B \subset C \Leftrightarrow A \cup B = B \cap C$

**Exercice9 :** Soient  $A ; B ; C$  des parties d'un ensemble  $E$

Monter que :

$$1) A = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap \overline{C})$$

$$2) (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$$

$$3) A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \Leftrightarrow A \cap B = A \cap C$$

**Solution :1)**

$$(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C)$$

$$= [(A \cap B) \cap (C \cup \overline{C})] \cup [(A \cap \overline{B}) \cap (C \cup \overline{C})]$$

$$= [(A \cap B) \cap E] \cup [(A \cap \overline{B}) \cap E] = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$$

$$= A \cap (B \cup \overline{B}) = A \cap E = A$$

$$2) (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = [B \cup (A \cap C)] \cap (C \cup A)$$

$$= (B \cap (C \cup A)) \cup ((A \cap C) \cap (C \cup A))$$

$$= (B \cap C) \cup (B \cap A) \cup (A \cap C)$$

3) Montrons que :

$$\begin{cases} A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \Rightarrow A \cap B = A \cap C \\ A \cap B = A \cap C \Rightarrow A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \end{cases}$$

$$A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \Rightarrow \overline{A \cap \overline{B}} = \overline{A \cap \overline{C}} \Rightarrow \overline{A} \cup B = \overline{A} \cup C$$

$$\Rightarrow \overline{A} \cup B = \overline{A} \cup C \Rightarrow A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap (\overline{A} \cup C)$$

$$\Rightarrow (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap C)$$

$$\Rightarrow A \cap B = A \cap C$$

Inversement :

$$A \cap B = A \cap C \Rightarrow A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \Rightarrow A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$$

D'après l'implication directe

$$\text{Donc : } A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \Leftrightarrow A \cap B = A \cap C$$

**Exercice10 :** Soient  $A ; B ; C$  des parties d'un ensemble  $E$

$$\text{Monter que : } \begin{cases} A \cup B \subset A \cup C \\ A \cap B \subset A \cap C \end{cases} \Rightarrow B \subset C$$

**Solution :** On suppose que :

$$\begin{cases} A \cup B \subset A \cup C \\ A \cap B \subset A \cap C \end{cases} \text{ Montrons que :}$$

$$(\forall x \in E)(x \in B \Rightarrow x \in C) ?$$

$$x \in B \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \cup C \Rightarrow x \in A \text{ ou } x \in C$$

- Si  $x \in A$  alors  $x \in A \cap B$  donc  $x \in A \cap C$  car

$$A \cap B \subset A \cap C \text{ donc } B \subset C$$

- Si  $x \notin A$  et puisque  $x \in C$  ou  $x \in A$  est vraie alors  $B \subset C$

$$\text{Conclusion : } (\forall x \in E)(x \in B \Rightarrow x \in C)$$

Donc  $B \subset C$

**Exercice11 :** Soient  $A ; B ; C$  des parties d'un ensemble  $E$

La différence symétrique de  $A$  et  $B$  c'est l'ensemble

$$\text{Qu'on note : } A \Delta B \text{ tel que : } A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

$$1) \text{Monter que : } A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$2) \text{Monter que : } \overline{A \Delta B} = A \Delta B$$

3) Montrer que :  $\forall C \in P(E) : A \Delta B = A \Delta C \Leftrightarrow B = C$

**Solution : 1)**

$$\begin{aligned} A \Delta B &= (A - B) \cup (B - A) = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) \\ &= [(A \cap \bar{B}) \cup B] \cap [(A \cap \bar{B}) \cup \bar{A}] \\ &= (A \cup B) \cap (B \cup \bar{B}) \cap (A \cup \bar{A}) \cap (\bar{B} \cup \bar{A}) \\ &= (A \cup B) \cap E \cap E \cap (\overline{A \cap B}) \\ &= (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}) = (A \cup B) - (A \cap B) \end{aligned}$$

2) Montrer que :

$$\begin{aligned} \overline{A \Delta B} &= (\overline{A - B}) \cup (\overline{B - A}) = (\overline{A \cap B}) \cup (\overline{B \cap A}) \\ &= (A - B) \cup (B - A) = A \Delta B \end{aligned}$$

3) soit  $C \in P(E)$

- Si on a :  $B = C$  alors  $A \Delta B = A \Delta C$
- Supposons que :  $A \Delta B = A \Delta C$  et montrons que  $B = C$  ?

✓ Soit  $x \in B$  montrons que  $x \in C$  ?

Si  $x \in A$  :

$$\begin{aligned} (x \in A \text{ et } x \in B) &\Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow x \notin A \Delta B \Rightarrow x \notin A \Delta C \\ (\text{Car } A \Delta B &= A \Delta C) \\ &\Rightarrow x \in A \cap C \Rightarrow x \in C \end{aligned}$$

Donc  $A \cap B \subset C$  (1)

Si  $x \notin A$  :

$$\begin{aligned} (x \notin A \text{ et } x \in B) &\Rightarrow x \in B - A \Rightarrow x \in A \Delta B \Rightarrow x \in A \Delta C \\ (\text{Car } A \Delta B &= A \Delta C) \\ &\Rightarrow x \in C - A \Rightarrow x \in C \end{aligned}$$

Donc  $\overline{A} \cap B \subset C$  (2)

De (1) et (2) on déduit que :  $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \subset C$

Et puisque :  $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = (A \cup \overline{A}) \cap B = E \cap B = B$

Alors  $B \subset C$

De même on montre que :  $C \subset B$

Donc :  $A \Delta B = A \Delta C \Rightarrow B = C$

Finalement :  $A \Delta B = A \Delta C \Leftrightarrow B = C$

### 7) Produit cartésien

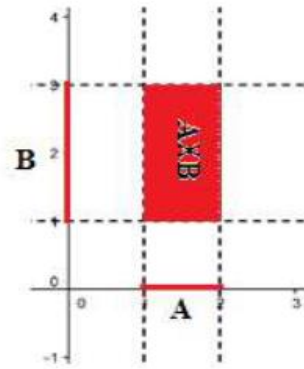
Définition : Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles ; le produit cartésien de  $A$  et  $B$  est l'ensemble des couples  $(x, y)$  tels que  $x \in A$  et  $y \in B$ , On le note par  $A \times B$ .

$A \times B = \{(x, y) / x \in A \text{ et } y \in B\}$  Le carré cartésien d'un ensemble  $A$

Est l'ensemble  $A \times A$  noté  $A^2$

**Exemples :**

$$A = [1, 2] ; B = [1, 3]$$



**Exercice 12 :** Soit l'ensemble :

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + xy - 2y^2 + 5 = 0\}$$

1) a) vérifier que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + xy - 2y^2 = (x - y)(x + 2y)$$

b) Ecrire en extension l'ensemble  $E \cap \mathbb{Z}^2$

c) montrer que :  $E = \left\{ \left( \frac{2t^2 - 5}{3t}, \frac{-t^2 - 5}{3t} \right) / t \in \mathbb{R}^* \right\}$

4) Ecrire en compréhension les ensembles suivants :

$$A = \{0; 1; 4; 9; 16; \dots\} \text{ et } B = \left\{ -1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots \right\}$$

$$C = \{\dots; -5; -2; 1; 4; 7; \dots\}$$

**Solution : 1) a)**

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - y)(x + 2y) &= x^2 + 2xy - xy - 2y^2 \\ &= x^2 + xy - 2y^2 \end{aligned}$$

b)  $(x, y) \in E \cap \mathbb{Z}^2 \Leftrightarrow (x, y) \in E \text{ et } (x, y) \in \mathbb{Z}^2$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x + 2y) = -5 \text{ et } (x, y) \in \mathbb{Z}^2$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \begin{cases} x - y = -5 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x - y = 5 \\ x + 2y = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x - y = -1 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = -5 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } E \cap \mathbb{Z}^2 = \{(-3; 2); (3; -2); (1; 2); (-1; -2)\}$$

c)  $(x, y) \in E \Leftrightarrow (x - y)(x + 2y) = -5 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = t \\ x + 2y = \frac{-5}{t} \end{cases} : t \in \mathbb{R}^*$

$$\Leftrightarrow \left( x = \frac{2t^2 - 5}{3t} \text{ et } y = \frac{-t^2 - 5}{3t} \right) : t \in \mathbb{R}^*$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in \left\{ \left( \frac{2t^2 - 5}{3t}, \frac{-t^2 - 5}{3t} \right) / t \in \mathbb{R}^* \right\}$$

$$\text{Donc : } E = \left\{ \left( \frac{2t^2 - 5}{3t}, \frac{-t^2 - 5}{3t} \right) / t \in \mathbb{R}^* \right\}$$

4)  $A = \{k^2; k \in \mathbb{N}\}$  et  $B = \left\{ \frac{(-1)^k}{k}; k \in \mathbb{N}^* \right\}$

$$C = \{1 + 3n; n \in \mathbb{Z}\}$$

**Exercice13** : soient  $E$  et  $F$  deux ensembles et  $A$  et  $B$  deux parties respectives de  $E$  et  $F$

- 1) déterminer le complémentaire de  $A \times F$  dans  $E \times F$
- 2) déterminer le complémentaire de  $E \times F$  dans  $E \times F$

3) déterminer le complémentaire de  $A \times B$  dans  $E \times F$

**Solution** : 1) le complémentaire de  $A \times F$  dans

$$E \times F \text{ se note : } C_{E \times F}^{A \times F} \text{ ou } \overline{A \times F}$$

$$(x; y) \in \overline{A \times F} \Leftrightarrow (x; y) \notin A \times F \Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } y \notin F$$

$$\Leftrightarrow x \in \overline{A} \text{ ou } y \in \overline{F} \Leftrightarrow (x; y) \in \overline{A} \times F \text{ ou } y \notin F$$

$$\Leftrightarrow (x; y) \in \overline{A} \times F \text{ Car : } y \notin F \text{ donne l'ensemble vide}$$

$$\text{Donc : } \overline{A \times F} = \overline{A} \times F$$

$$(x; y) \in \overline{E \times B} \Leftrightarrow (x; y) \notin E \times B \Leftrightarrow x \notin E \text{ ou } y \notin B$$

$$\Leftrightarrow x \in \overline{E} \text{ ou } y \in \overline{B} \Leftrightarrow (x; y) \in E \times \overline{B} \text{ ou } x \notin E$$

$$\Leftrightarrow (x; y) \in E \times \overline{B} \text{ Car : } x \notin E \text{ donne l'ensemble vide}$$

$$\text{Donc : } \overline{E \times B} = E \times \overline{B}$$

$$3) (x; y) \in \overline{A \times B} \Leftrightarrow (x; y) \notin A \times B \Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } y \notin B$$

$$\Leftrightarrow x \in \overline{A} \text{ ou } y \in \overline{B} \Leftrightarrow (x; y) \in \overline{A} \times F \text{ ou } (x; y) \in E \times \overline{B}$$

$$\Leftrightarrow (x; y) \in (\overline{A} \times F) \cup (E \times \overline{B})$$

$$\text{Donc : } \overline{A \times B} = (\overline{A} \times F) \cup (E \times \overline{B})$$

**Exercice14** : soient l'ensemble :

$$L = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Montrer qu'il n'existe pas deux parties  $A$  et  $B$  de  $\mathbb{R}$  tels que :  $L = A \times B$

**Solution** : On suppose: qu'il existe deux parties  $A$  et  $B$  de  $\mathbb{R}$  tels que :  $L = A \times B$

$$\text{On a : } (1; 0) \in L \text{ et } (0; 1) \in L$$

$$\text{Donc : } 1 \in A \text{ et } 1 \in B \text{ car } L = A \times B$$

$$\text{Donc : } (1; 1) \in A \times B \text{ cad } (1; 1) \in L$$

$$\text{Donc contradiction car : } 1^2 + 1^2 > 1$$

Conclusion il n'existe pas deux parties  $A$  et  $B$  de  $\mathbb{R}$  tels que :  $L = A \times B$

**Exercice15** : Soient les ensembles :

$$H = \left\{ y \in \mathbb{R} / y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$G = \left\{ y \in \mathbb{R} / y = \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + 1}} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

1- montrer que :  $H = ]0, 1]$ .

a- Considérer un élément  $y_0 \in H$

et montrer que  $y_0 \in ]0, 1]$

b- Considérer un élément  $y_0 \in ]0, 1]$

et montrer que  $y_0 \in H$

2- Montrer que  $G \subset H$

3- Est-ce que  $G = H$  ?

**Solution** :

1- a- soit un élément  $y_0 \in H$  montrons que  $y_0 \in ]0, 1]$  ?

$$y_0 \in H \Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R} / y_0 = \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + 1}}$$

$$\text{On a } x_0^2 \geq 0 \Rightarrow x_0^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x_0^2 + 1} \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + 1}} \leq 1 \Rightarrow$$

$$y_0 \in ]0, 1] \text{ Donc : } H \subset ]0, 1] \text{ (1)}$$

b- Considérer un élément  $y_0 \in ]0, 1]$

et montrons que  $y_0 \in H$  ?

$$y_0 \in ]0, 1] \quad \exists ? x_0 \in \mathbb{R} / y_0 = \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + 1}}$$

$$y_0 = \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + 1}} \Leftrightarrow y_0^2 = \frac{1}{x_0^2 + 1} \Leftrightarrow x_0^2 = \frac{1}{y_0^2} - 1$$

$$\text{Or : } y_0 \in ]0, 1] \text{ donc } 0 < y_0 \leq 1 \text{ donc } \frac{1}{y_0^2} - 1 \geq 0$$

$$\text{Donc : il suffit de prendre : } x_0 = \sqrt{\frac{1}{y_0^2} - 1} \text{ Donc : } y_0 \in H$$

$$\text{Donc : } ]0, 1] \subset H \text{ (2)}$$

De : (1) et (2) en déduit que :  $H = ]0, 1]$

2- montrons que  $G \subset H$  ??

Montrons que :  $G \subset ]0, 1]$  ?

soit un élément  $y_0 \in G$  montrons que  $y_0 \in ]0, 1]$  ?

$$y_0 \in G \Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R} / y_0 = \frac{1}{1 + \sqrt{x_0^2 + 1}}$$

$$\text{On a } x_0^2 \geq 0 \Rightarrow x_0^2 + 1 \geq 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_0^2 + 1} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x_0^2 + 1} + 1 \geq 2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{1 + \sqrt{x_0^2 + 1}} \leq \frac{1}{2} \leq 1$$

$$\text{Donc : } y_0 \in ]0, 1] \text{ Donc : } G \subset H$$

3) supposons :  $G = H$

$$\text{On a } 1 \in H \Rightarrow 1 \in G$$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R} / 1 = \frac{1}{1 + \sqrt{x_0^2 + 1}}$$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R} / 1 + \sqrt{x_0^2 + 1} = 1 \Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R} / \sqrt{x_0^2 + 1} = 0$$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R} / x_0^2 = -1 \text{ absurde donc : } H \neq G$$

**Exercice16** : on considère dans  $\mathbb{Z}$  les deux parties suivantes :

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} / \frac{4x^2 - 4x + 10}{2x - 1} \in \mathbb{Z} \right\} \text{ et } B = \left\{ x \in \mathbb{Z} / \frac{x + 10}{x - 5} \in \mathbb{Z} \right\}$$

1)a) montrer que  $(\forall x \in \mathbb{Z} - \{5\}) \frac{x + 10}{x - 5} = 1 + \frac{15}{x - 5}$

1)b) montrer que  $(\forall x \in \mathbb{Z}) \frac{4x^2 - 4x + 10}{2x - 1} = 2x - 1 + \frac{9}{2x - 1}$

2) déterminer :  $A$  ;  $B$  ;  $A - B$  ;  $B - A$  et  $A \Delta B$  en extension

3) on admet que l'opération est associative dans l'ensembles des parties de  $\mathbb{Z}$  :  $P(\mathbb{Z})$

Résoudre dans  $P(\mathbb{Z})$  l'équation :  $A \Delta X = B$

**Solution : 1) a)** il est aisé de voir que :

$$(\forall x \in \mathbb{Z} - \{5\}) \frac{x + 10}{x - 5} = 1 + \frac{15}{x - 5}$$

**1) b)** il est aisé aussi de voir que

$$(\forall x \in \mathbb{Z}) 2x - 1 + \frac{9}{2x - 1} = \frac{(2x - 1)^2 + 9}{2x - 1} = \frac{4x^2 - 4x + 10}{2x - 1}$$

2) détermination de :  $A$  ?

On a :  $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} / \frac{4x^2 - 4x + 10}{2x - 1} \in \mathbb{Z} \right\}$  et

$$(\forall x \in \mathbb{Z}) 2x - 1 \in \mathbb{Z} \text{ et } \frac{4x^2 - 4x + 10}{2x - 1} = 2x - 1 + \frac{9}{2x - 1}$$

En déduit que :  $(\forall x \in \mathbb{Z}) ; x \in A \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 4x + 10}{2x - 1} \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 + \frac{9}{2x - 1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{9}{2x - 1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2x - 1 \text{ divise } 9$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 \in \{-9; -3; -1; 1; 3; 9\} \Leftrightarrow 2x \in \{-8; -2; 0; 2; 4; 10\}$$

$$\Leftrightarrow x \in \{-4; -1; 0; 1; 2; 5\} \text{ donc : } A = \{-4; -1; 0; 1; 2; 5\}$$

détermination de :  $B$  ?

soit  $x \in \mathbb{Z}$  de façon analogue nous pouvons écrire :

$$x \in B \Leftrightarrow x \neq 5 \text{ et } x - 5 \text{ divise } 15$$

$$\Leftrightarrow x - 5 \in \{-15; -5; -3; -1; 1; 3; 5; 15\}$$

$$\Leftrightarrow x \in \{-10; 0; 2; 4; 6; 8; 10; 20\} \text{ donc :}$$

$$B = \{-10; 0; 2; 4; 6; 8; 10; 20\}$$

détermination de :  $A - B$  ;  $B - A$  et  $A \Delta B$  ?

$$A - B = \{-4; -1; 0; 1; 2; 5\} - \{-10; 0; 2; 4; 6; 8; 10; 20\} = \{-4; -1; 1; 5\}$$

$$A - B = \{-10; 0; 2; 4; 6; 8; 10; 20\} - \{-4; -1; 0; 1; 2; 5\} = \{-10; 4; 6; 8; 10; 20\}$$

$$A \Delta B = (A - B) \cup (A - B) = \{-10; 4; 6; 8; 10; 20; -4; -1; 1; 5\}$$

3) Résolution dans  $P(\mathbb{Z})$  de l'équation :  $A \Delta X = B$

On trouve :  $X = \{-10; 4; 6; 8; 10; 20; -4; -1; 1; 5\}$

**Exercice17** : Soient les ensembles :

$$E = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - xy - 2y^2 = 0\}$$

$$F = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0\}$$

1) montrer que :  $F \subset E$

2) déterminer  $y$  de  $\mathbb{R}$  tel que :  $(1; y) \in E$  ; est ce que on a  $E \subset F$  ?

3) montrer que :  $E = F \cup G$  ou  $G$  est un ensemble à déterminer

4) Soient les ensembles :

$$A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = x + 1 + \sqrt{x^2 + 1} = 0\}$$

$$B = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = x + 1 - \sqrt{x^2 + 1} = 0\}$$

a) montrer que :  $H = A \cup B$

b) déterminer :  $H \cap F$

**Solution : 1)** montrons que :  $F \subset E$  ?

On a :  $(x; y) \in F \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x$

$$\Rightarrow x^2 - xy - 2y^2 = y^2 + y^2 - 2y^2 = 0 \Rightarrow (x; y) \in E$$

Donc :  $F \subset E$

2)  $(1; y) \in E \Leftrightarrow 1 - y - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (1 + y)(1 - 2y) = 0$

$$\Leftrightarrow y = 1 \text{ ou } y = \frac{1}{2}$$

Donc :  $\left(1; \frac{1}{2}\right) \in E$  ou  $\left(1; \frac{1}{2}\right) \notin F$

Donc :  $\exists (x; y) \in \mathbb{R}^2 / (x; y) \notin F$  et  $(x; y) \in E$

Donc :  $E \not\subset F$

3)  $(x; y) \in E \Leftrightarrow x^2 - xy - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + xy - 2y^2 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + xy - 2xy - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow x(x + y) - 2y(x + y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y)(x - 2y) = 0 \Leftrightarrow x + y = 0 \text{ ou } x - 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow (x; y) \in F \text{ ou } (x; y) \in G$$

Avec :  $G = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x - 2y = 0\}$

Donc :  $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 (x; y) \in E \Leftrightarrow (x; y) \in F$  ou  $(x; y) \in G$

Donc :  $E = F \cup G$

4) a)  $(x; y) \in H \Leftrightarrow y^2 - 2y(x + 1) + 2x = 0$

$$\Leftrightarrow y^2 - 2y(x + 1) + (x + 1)^2 - (x + 1)^2 + 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow [y - (x + 1)]^2 = (x + 1)^2 - 2x \Leftrightarrow [y - (x + 1)]^2 = x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow y = x + 1 + \sqrt{x^2 + 1} \text{ ou } \Leftrightarrow y = x + 1 - \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow (x; y) \in A \text{ ou } (x; y) \in B \text{ Donc : } H = A \cup B$$

4) b)  $(x; y) \in H \cap F \Leftrightarrow (x; y) \in H$  ou  $(x; y) \in F$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2xy + 2x - 2y = 0 \text{ et } x = -y$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x^2 + 2x + 2x = 0 \\ x = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 4x = 0 \\ x = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(3x + 4) = 0 \\ x = -y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = -\frac{4}{3} \\ x = -y \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } y = 0 \text{ ou } x = -\frac{4}{3} \text{ et } y = \frac{4}{3}$$

Donc :  $(x; y) \in H \cap F \Leftrightarrow (x; y) \in \left\{ (0; 0); \left(-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right) \right\}$

$$H \cap F = \left\{ (0; 0); \left(-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right) \right\}$$

**Exercice 18** : Soient  $A$  ;  $B$  ;  $C$  des parties d'un ensemble  $E$

1) a) déterminer une condition suffisante de l'existence de  $X$  dans  $P(E)$  tel que :  $A \cup X = B$

b) résoudre dans  $P(E)$  l'équation :  $A \cup X = B$

2) on suppose que  $C \subset A \subset B$

résoudre dans  $P(E)$  le système :  $\begin{cases} A \cup X = B \\ A \cap X = C \end{cases}$

**Solution** : 1) si on a :  $A \cup X = B$  alors :  $X \subset B$  et  $A \subset B$   
Donc une condition suffisante de l'existence de  $X$  dans  $P(E)$  tel que :  $A \cup X = B$  est  $A \subset B$

b) résolution dans  $P(E)$  l'équation :  $A \cup X = B$

$$A \cup X = B \Rightarrow (A - B) \cap (A \cup X) = (B - A) \cap B$$

$$\Leftrightarrow [(B - A) \cap A] \cup [(B - A) \cap X] = B - A$$

$$\Leftrightarrow \emptyset \cup [(B - A) \cap X] = B - A$$

$$\Leftrightarrow (B - A) \cap X = B - A \Leftrightarrow B - A \subset X \Rightarrow B - A \subset X \subset B$$

Inversement :

$\forall X \in P(E)$  tel que :  $B - C \subset X \subset B$  est solution de l'équation :  $A \cup X = B$

$$\text{Et on a : } (B - A) \cup A = B \quad (B - A) \cap A = \emptyset$$

$$\text{Donc : } A \cup X = B \Leftrightarrow X = (B - A) \cup Y \quad Y \in P(E)$$

L'ensemble des solutions de l'équation est :

$$S = \left\{ (B - A) \cup Y; Y \in P(E) \right\}$$

2)  $C \subset A \subset B$

$$\begin{cases} A \cup X = B \\ A \cap X = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = (B - A) \cup Y / Y \in P(E) \\ A \cap [(B - A) \cup Y] = C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = (B - A) \cup Y / Y \in P(E) \\ [A \cap (B - A)] \cup [A \cap Y] = C \end{cases}$$

et puisque  $A \cap (B - A) = \emptyset$  et  $A \cap Y = Y$  car  $Y \subset A$

$$\text{alors : } X = (B - A) \cup C$$

L'ensemble des solutions de l'équation est :

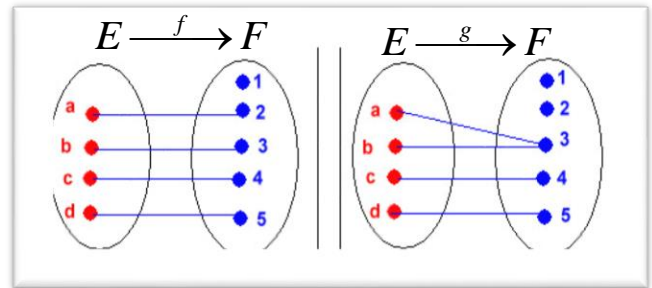
$$S = \left\{ (B - A) \cup C \right\}$$

## II) LES APPLICATIONS

### 1) Activités : Activité 1 :

Considérons les ensembles :

$E = \{a, b, c, d\}$  et  $F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $f, g$  sont des relations de  $E$  dans  $F$ .



Que pouvez-vous dire des relations ci-dessus ?

**Activité 2** : Soit la fonction  $f$  définie par :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$$

$$\bar{A} = \{x \in E / x \notin A\}$$

1- Montrer que chaque élément de  $\mathbb{R}$  a une image.

2- l'implication suivante est-elle vraie :

$$(P) \quad (a \neq b) \Rightarrow (f(a) \neq f(b)).$$

3- Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) \in \left[ \frac{-1}{2}; \frac{1}{2} \right]$

4- Montrer que  $(\forall y \in \left[ \frac{-1}{2}; \frac{1}{2} \right]) (\exists x \in \mathbb{R}) (f(x) = y)$

### 2) Définitions et vocabulaires

#### 2.1 Application Définition :

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles non vides, on appelle application toute relation  $f$  de  $E$  dans  $F$  tel que : tout élément  $x$  de  $E$  est relié à un unique élément  $y$  de  $F$ .

Vocabulaire :

$$f : E \rightarrow F$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

1) L'ensemble  $E$  s'appelle ensemble de départ de l'application  $f$ .

2) L'ensemble  $F$  s'appelle ensemble d'arrivée de l'application  $f$ .

3)  $y = f(x)$  s'appelle l'image de  $x$  par l'application  $f$ .

4)  $x$  s'appelle l'antécédent de  $y$  par l'application  $f$ .

$$f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

**Exemple 1** :  $f$  est une l'application de

$$x \mapsto \frac{x+1}{x}$$

$\mathbb{R} - \{0\}$  dans  $\mathbb{R}$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

**Exemple 2** :  $g$  n'est pas une l'application de

$$x \mapsto \frac{x+1}{x}$$

$\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  car 0 n'admet pas d'images



## 2.2 Egalité de deux applications

### Activité :

Soient les deux applications suivantes :

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \quad g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$$
$$n \mapsto (-1)^n \times n \quad \text{et} \quad n \mapsto \begin{cases} n, \text{ si } n \text{ pair} \\ -n, \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Vérifier que  $(\forall n \in \mathbb{N})(f(n) = g(n))$

**Définition :** On dit que deux applications  $f$  et  $g$  sont égales si :

- 1) Elles ont le même ensemble de départ  $E$
- 2) Elles ont le même ensemble d'arrivée  $F$
- 3)  $(\forall x \in E)(f(x) = g(x))$ .

**Exemple1 :** Les 3 applications :

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad \text{et} \quad h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \mapsto x^2 \quad x \mapsto x^2 \quad x \mapsto x^2$$

Sont différentes.

**Exemple2 :** soit les 2 applications :

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \quad g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$n \mapsto (-1)^n \quad \text{et} \quad n \mapsto \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$$

que deux applications  $f$  et  $g$  ont le même ensemble de départ  $\mathbb{Z}$  et le même ensemble d'arrivée  $\mathbb{R}$

Et on a :

$$g(n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = \cos(n\pi) = (-1)^n = f(n)$$

Donc :  $f = g$

### Définition :(injection)

Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ , on dit que  $f$  est injective de  $E$  dans  $F$  si :

$$\forall (x_1; x_2) \in E^2 \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Par contraposition on peut dire que :

$$(f \text{ est injective}) \Leftrightarrow \forall (x_1; x_2) \in E^2$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

**Exemples :**

**Exemple1 :** soit l'application :  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$x \mapsto x + \sqrt{x}$$

$f$  est-elle injective ?

**Solution :** soient  $x_1 \in \mathbb{R}^+$  et  $x_2 \in \mathbb{R}^+$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + \sqrt{x_1} = x_2 + \sqrt{x_2}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = 0 \quad \text{ou} \quad \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + 1 = 0$$

Or  $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + 1 \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = 0$

$$\Rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \text{donc } f \text{ est injective}$$

**Exemple2 :** soit l'application :  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^2 - 1$$

$g$  est-elle injective ?

**Solution :** on a :  $g(1) = g(-1) = 0$  mais  $1 \neq -1$

Donc  $g$  n'est pas injective

$$f: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$$

**Exercice19 :1)**

$$x \mapsto \frac{3x+1}{x-2}$$

Montrer que  $f$  est injective

2)  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $g$  est-elle injective ?

$$x \mapsto x^2 + 4$$

$$h: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}$$

2)

$$n \mapsto 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

1- déterminer les images des entiers 1, 2, 3

2- Montrer que  $n > m \Rightarrow h(n) > h(m)$

3- En déduire que  $h$  est injective.

### Définition :(surjection)

Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ , on dit que  $f$  est surjective de  $E$  dans  $F$  si tout élément  $y$  de  $F$  admet un antécédent dans  $E$ .

$$(\forall y \in F)(\exists x \in E)(f(x) = y)$$

Autrement dit : Pour tout  $y$  dans  $F$  l'équation  $f(x) = y$  admet au moins une solution dans  $E$ .

**Exemples :**

**Exemple1 :** soit l'application :  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow ]-\infty; 3]$

$$x \mapsto 3 - x^2$$

$f$  est-elle surjective de  $\mathbb{R}^+$  vers  $]-\infty; 3]$ .

**Solution :** soient  $y \in ]-\infty; 3]$

Resolvons l'équation:  $f(x) = y$

$$f(x) = y \Leftrightarrow 3 - x^2 = y \Leftrightarrow x^2 = 3 - y$$

Or  $y \in ]-\infty; 3]$  donc  $y \leq 3$  donc  $0 \leq 3 - y$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{3 - y} \quad \text{car } x \in \mathbb{R}^+$$

Donc :  $(\forall y \in ]-\infty; 3])(\exists x \in \mathbb{R}^+)(f(x) = y)$

Donc :  $f$  est surjective

**Exemple2 :** soit l'application :  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto 3 - x^2$$

$f$  est-elle surjective de  $\mathbb{R}^+$  vers  $\mathbb{R}$  . ?

**Solution :** on remarque que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \text{ on a : } f(x) \leq 3$$

Donc par exemple l'équation:  $f(x) = 4$  n'admet pas de solution dans  $\mathbb{R}^+$  donc :  $f$  est non surjective

$$f : \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$$

**Exercice 20: 1)**

$$x \mapsto \frac{3x+1}{x-2}$$

- a-  $f$  est-elle surjective de  $\mathbb{R} - \{2\}$  vers  $\mathbb{R}$ .  
 b- Modifier l'ensemble d'arrivé pour définir une application surjective.

2)  $f : \mathbb{R} \rightarrow [2; +\infty[$   
 $x \mapsto x^2 - 2x + 3$

- a- Montrer que la fonction  $g$  est surjective.  
 b-  $g$  est-elle injective ?

$h : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q} \cap [1; +\infty[$

3)  $n \mapsto 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

$h$  est-elle surjective ?

**Définition : (bijection)** Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ , on dit que  $f$  est une bijection de  $E$  dans  $F$  si elle injective et surjective

**Propriété :** Une application est une bijection de  $E$  dans  $F$  si et seulement si :

$$(\forall y \in F) (\exists ! x \in E) (f(x) = y)$$

Autrement dit : Pour tout  $y$  dans  $F$  l'équation  $f(x) = y$  admet une unique solution dans  $E$ .

**Exemple1 :** soit l'application :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto 2 - 5x$

$f$  est-elle une bijection de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  ?

**Solution :** soient  $y \in \mathbb{R}$

Resolvons l'équation :  $f(x) = y$

$$f(x) = y \Leftrightarrow 2 - 5x = y \Leftrightarrow x = \frac{2-y}{5}$$

Puisque l'équation  $f(x) = y$  admet une unique solution dans  $\mathbb{R}$  ( $\forall y \in \mathbb{R}$ )

Donc :  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ .

**Exercice21 :**

$$f : [1; +\infty[ \rightarrow [2; +\infty[$$

$$x \mapsto x^2 - 2x + 3$$

1- Montrer que  $f$  est une bijection de  $[1; +\infty[$  vers  $[2; +\infty[$ .

2- Soit  $y$  un élément de  $[2; +\infty[$ , déterminer (en fonction de  $y$ ) l'élément  $x$  dans  $[1; +\infty[$  tel que  $f(x) = y$   
 L'application qui lie l'élément  $y$  de  $[2; +\infty[$ , à l'élément unique  $x$  de  $[1; +\infty[$  et solution de l'équation  $f(x) = y$  s'appelle : la bijection réciproque de la bijection  $f$  et se note :  $f^{-1}$

**Définition :** Si  $f$  est une bijection de  $E$  dans  $F$ ;  
 L'application de  $F$  dans  $E$  qui lie chaque élément  $y$  par l'élément  $x$  de  $E$  qui est solution de l'équation  $f(x) = y$  s'appelle la bijection réciproque de la bijection  $f$

et se note  $f^{-1}$ .  $f$  bijection de  $E$  dans  $F$  ;  $f^{-1}$  sa bijection réciproque on a :

$$\begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ y \in F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = y \\ x \in E \end{cases}$$

$$f : ]1; +\infty[ \rightarrow ]0; +\infty[$$

**Exemple :** soit l'application :

$$x \mapsto \frac{2}{x-1}$$

Montrer que  $f$  est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

**Solution** soient  $y \in ]0; +\infty[$

Resolvons l'équation :  $f(x) = y$

$$\begin{cases} f(x) = y \\ x \in ]1; +\infty[ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{x-1} = y \\ x \in ]1; +\infty[ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = \frac{2}{y} \\ x \in ]1; +\infty[ \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2}{y} + 1$$

$$(\forall y \in ]0; +\infty[) (\exists ! x \in ]1; +\infty[) (f(x) = y)$$

Donc :  $f$  est une bijection de  $]1; +\infty[$  vers  $]0; +\infty[$

$$\begin{cases} f(x) = y \\ x \in ]1; +\infty[ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ y \in ]0; +\infty[ \end{cases}$$

$$\forall y \in ]0; +\infty[ \quad f^{-1}(y) = \frac{2}{y} + 1 \quad \text{Donc : } f^{-1} : ]0; +\infty[ \rightarrow ]1; +\infty[$$

$$x \mapsto \frac{2}{x} + 1$$

**Exercice 22:** Déterminer la fonction réciproque de la

fonction  $f : [1; +\infty[ \rightarrow [2; +\infty[$   
 $x \mapsto x^2 - 2x + 3$

**Exercice 23 :** Soit la fonction  $g$  définie par :

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$$

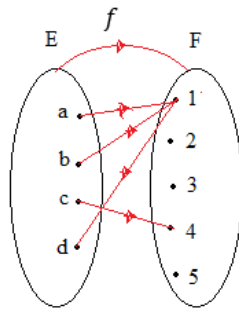
Montrer que  $g$  est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

**3) L'image directe et l'image réciproque d'un ensemble par une application**

**3.1 Activité /Activité 1 :**

Soit  $f$  dont le diagramme sagittal est représenté ci-contre

- Déterminer les images directes des ensemble  $\{a, b, c\}$  et  $\{b, c\}$  et  $E$



- Déterminer les antécédents des éléments qui appartiennent aux ensembles :  $\{1\}$  ;  $\{1,3\}$  ;  $\{2,3\}$  et  $\{1,4\}$

**Activité 2 :** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto 2x^2 - x$

1- Montrer que  $\forall x \in [-1;1] \quad f(x) \in \left[\frac{-3}{16}; 3\right]$

2- Montrer que :  $\forall y \in \left[\frac{-3}{16}; 3\right] \exists x \in [-1;1] / (f(x) = y)$

on dit que l'image de l'intervalle  $[-1;1]$  par

l'application  $f$  est l'intervalle  $\left[\frac{-3}{16}; 3\right]$  et on écrit :

$$f([-1;1]) = \left[\frac{-3}{16}; 3\right]$$

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

**Activité 3 :** Soit  $(x; y) \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2}$

- Déterminer les couples  $(x,y)$  qui vérifient

$$h((x,y)) = 1$$

- Représenter dans le plan muni d'un repère

orthonormé les points  $M(x, y)$  qui vérifient

$$h((x, y)) = 1.$$

**Définition :** Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ ,  $A$  une partie de  $E$  et  $B$  une partie de  $F$ .

L'image directe de l'ensemble  $A$  est l'ensemble

$$f(A) = \{f(x) \in F / x \in A\}$$

L'image réciproque de l'ensemble  $B$  est l'ensemble

$$f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$$

**Remarques :** 1) Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ ,  $A$  une partie de  $E$  et  $B$  une partie de  $F$ .

$$f(A) = B \Leftrightarrow \begin{cases} f(A) \subset B \\ B \subset f(A) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\forall x \in A)(f(x) \in B) \\ (\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y) \end{cases}$$

2)  $f(A) = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$  mais si  $f^{-1}(B) = \emptyset$  on ne peut pas dire que  $B = \emptyset$  exemple :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{on a : } f^{-1}(\mathbb{R}^-) = \emptyset$$

$$x \mapsto 2x^2 + 1$$

3) Pour parler de l'image réciproque d'un élément par une fonction, il faut que  $f$  soit bijective

Mais on peut considérer l'image réciproque d'un ensemble quel que soit la nature de l'application  $f$

**Propriété :** Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ .  
 $f$  est surjective de  $E$  dans  $F$ , si et seulement si  $f(E) = F$ .

**Preuve :** On a :  $f$  une application de  $E$  dans  $F$  donc :  
 $f(E) \subset F$  ; si de plus  $f$  est surjective alors :

$$(\forall y \in F)(\exists x \in E)(f(x) = y) \quad \text{et donc } F \subset f(E).$$

D'où  $f(E) = F$

Réciproquement si  $f(E) = F$  alors  $F \subset f(E)$  et par suite :  $(\forall y \in F)(\exists x \in E)(f(x) = y)$  donc  $f$  est surjective.

**Exemple1 :** soit l'application :  $f : \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \frac{3x-1}{x+1}$

1) Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\} \quad f(x) = 3 - \frac{4}{x+1}$

2) Déterminer :  $f(K)$  avec  $K = ]-\infty; -1[$

**Solution :** 1)  $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\} :$

$$3 - \frac{4}{x+1} = \frac{3x+3-4}{x+1} = \frac{3x-1}{x+1} = f(x)$$

$$2) x \in K \Leftrightarrow x < -1 \Leftrightarrow x+1 < 0 \Leftrightarrow -\frac{4}{x+1} > 0$$

$$\Leftrightarrow 3 - \frac{4}{x+1} > 3 \Leftrightarrow g(x) \in ]3; +\infty[ \quad \text{donc } f(K) = ]3; +\infty[$$

**Exemple2 :** soit l'application :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto x^2$

Déterminer :  $f^{-1}(B)$  avec  $B = [-1; 4]$

**Solution :**

$$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in B\} = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq f(x) \leq 4\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x^2 \leq 4\} = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x^2 \leq 4\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x \leq 2\} = [-2; 2] \quad \text{donc } f^{-1}(B) = [-2; 2]$$

**Exemple3 :** soit l'application :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \cos x$

Déterminer :  $f^{-1}(D)$  avec  $D = ]1; 2]$

**Solution :**

$$f^{-1}(D) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in D\} = \{x \in \mathbb{R} / 1 < f(x) \leq 2\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} / 1 < \cos x \leq 2\} = \emptyset \quad \text{car}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} / -1 \leq \cos x \leq 1 \quad \text{donc } f^{-1}(D) = \emptyset$$

**Exercice 24:**

Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{3}{1+x^2} \quad \text{déterminer } f^{-1}([1,2]) \quad f^{-1}([1;2])$$

#### 4) Restriction ; Prolongement d'une application

**Activité 1 :** Soit l'application :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 3|1-x^2| + x \quad \text{Ecrire l'expression de } f \text{ sur } [-1,1]$$

**Activité 2 :** Soit l'application

$$g : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{3x+1}{x-1}$$

1-  $g$  est-elle bijective ?

2- A partir de  $g$ , définir une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$

**Définition :** Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$

Soit  $A$  une partie de  $E$ , l'application définie de  $A$  vers  $F$ , qui associe à tout élément  $x$  de  $A$  l'élément  $f(x)$ , s'appelle la restriction de  $f$  sur l'ensemble  $A$ .

Soit  $\Gamma$  un ensemble tel que  $E \subset \Gamma$ , l'application définie de  $\Gamma$  vers  $F$ , qui associe à tout élément  $x$  de  $E$  l'élément  $f(x)$ , s'appelle un prolongement de  $f$  sur l'ensemble  $\Gamma$ .

**Exemple1 :** soit l'application :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x + 1}$$

Déterminer la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $]-\infty;1]$

**Solution :**  $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$

Si  $x \in ]-\infty;1]$  alors :  $f(x) = -(x-1) = -x+1$

Donc : la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $]-\infty;1]$  est

l'application  $g : ]-\infty;1] \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto -x+1$

**Exemple2 :** soit l'application :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x - |x| + 3$$

Déterminer la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $]-\infty;0]$

**Solution :**  $f(x) = 2x - |x| + 3$

Si  $x \in ]-\infty;0]$  alors :  $f(x) = 2x + x + 3 = 3x + 3$

Donc : la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $]-\infty;0]$  est

l'application  $g : ]-\infty;0] \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto 3x + 3$

**Exemple3 :** soit les applications :

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \quad \text{et} \quad x \mapsto 2|x| - x$$

Est-ce que  $g$  est un prolongement de  $f$  ?

**Solution :**  $g(x) = 2|x| - x = x$  Si  $x \in \mathbb{R}^+$  et  $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$

Donc :  $g$  est un prolongement de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

#### 7) La partie entière d'un réel.

**Théorème :** On admet la proposition suivante :

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists ! k \in \mathbb{Z})(k \leq x < k + 1).$$

**Définition :** L'entier relatif  $k$  qui vérifie le théorème précédent

S'appelle la partie entière du réel  $x$

on le note  $[x]$  ou  $E(x)$ .

L'application qui lie chaque élément  $x$  de  $\mathbb{R}$  par  $E(x)$  dans  $\mathbb{Z}$  s'appelle l'application partie entière.

Exemple :  $E(\sqrt{2}) = 1 \quad E(\sqrt{2}) = 1 ; \quad E(\pi) = 3$

$$E(-\pi) = -4 \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \left( E\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \right)$$

et  $(\forall k \in \mathbb{Z})(E(k) = k)$

**Exercices25 :** 1) Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall m \in \mathbb{Z})(E(m+x) = m + E(x)).$$

2) Vérifier par un contre-exemple que :

$$E(x+y) \neq E(x) + E(y)$$

3) Soit l'application  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto E(3x+1) + x$

1- Vérifier que  $h$  n'est pas injective.

2- Donner la restriction de  $h$  sur l'intervalle  $\left[0; \frac{1}{3}\right[$ .

3- Déterminer :  $h^{-1}\{4\}$  et  $h^{-1}\{2\}$ ;  $h$  est-elle surjective ?.

#### 8) Composition de deux applications.

**Activité :** Soient les deux applications :

$$f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad g : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{x}{x-1}$$

1- Déterminer  $f(g(3))$ ;  $f(g(-1))$   $g(f(3))$

2- Donner la condition sur  $x$  pour que le réel  $g(f(x))$  existe.

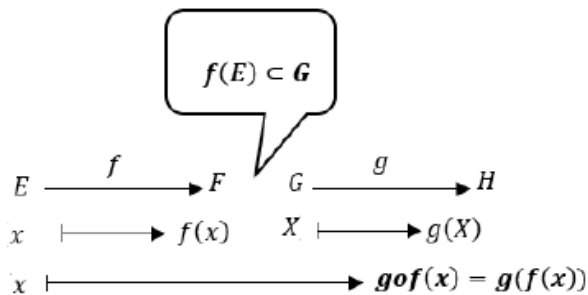
3- Donner la condition sur  $x$  pour que le réel  $f(g(x))$  existe.

4- Déterminer les application  $f \circ g$  et  $g \circ f$ .

**Définition :** Soient  $f$  une application de  $E$  dans  $F$  et  $g$  une application de  $G$  dans  $H$  tel que :  $f(E) \subset G$ , l'application  $h$  définie de  $E$  vers  $H$  par pour tout  $x$  dans  $E$ ,  $h(x) = g(f(x))$  s'appelle la composition des deux applications  $f$  et  $g$  et se note  $g \circ f$ .

$$(\forall x \in E) (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

On peut représenter la composition par :



**Propriété :**

- 1) La composition de deux applications injectives est une application injective
- 2) La composition de deux applications surjectives est une application surjective
- 3) La composition de deux bijections  $f$  et  $g$  est une bijection et  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

**Propriété :** 1) La composition des applications est associative :  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

2) La composition des applications n'est pas commutative :  $f \circ g \neq g \circ f$

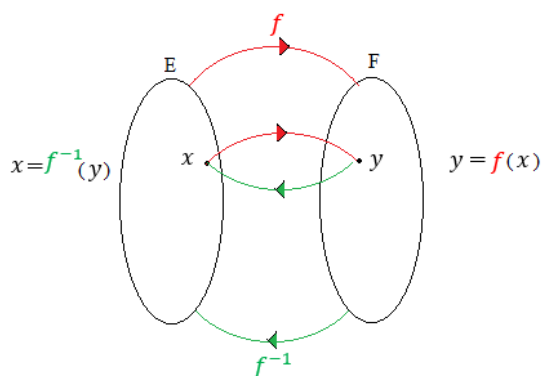
**Propriété :**

Si  $f$  est une bijection de  $E$  dans  $F$  et  $f^{-1}$  sa bijection réciproque :

1)  $(\forall x \in E) (f^{-1} \circ f)(x) = x$   $f^{-1} \circ f$  s'appelle l'identité de  $E$  et s note  $Id_E$

2°  $(\forall x \in F) (f \circ f^{-1})(x) = x$  ,  $f \circ f^{-1}$  s'appelle l'identité de  $F$  et s note  $Id_F$

Si  $E = F$  alors :  $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = Id_E$



$$h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \left[ \frac{1}{4}; +\infty \right[$$

$$x \mapsto x + \sqrt{x} + \frac{1}{4}$$

**Exemple :** soit l'application :

1) Ecrire l'application  $h$  comme La composée de deux applications  $f$  et  $g$  :  $h = g \circ f$

2)a) Montrer que  $f$  est une bijection et déterminer sa bijection réciproque

b) Montrer que  $g$  est une bijection et déterminer sa bijection réciproque

c) en déduire que  $h$  est une bijection de  $\mathbb{R}^+$  dans

$\left[ \frac{1}{4}; +\infty \right[$  et déterminer sa bijection réciproque

**Solution :** 1)  $h(x) = x + \sqrt{x} + \frac{1}{4} = x - \left( \sqrt{x} + \frac{1}{2} \right)^2$

Donc :  $h = g \circ f$  avec :

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \left[ \frac{1}{2}; +\infty \right[ \quad \text{et} \quad g: \left[ \frac{1}{2}; +\infty \right[ \rightarrow \left[ \frac{1}{4}; +\infty \right[$$

$$x \mapsto \sqrt{x} + \frac{1}{2} \quad \quad \quad x \mapsto x^2$$

2)a)  $f$  est une bijection en effet :

soient  $y \in \left[ \frac{1}{2}; +\infty \right[$

Resolvons l'équation :  $f(x) = y$

$$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{2} = y \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{2y-1}{2}$$

Or  $y \in \left[ \frac{1}{2}; +\infty \right[$  donc  $2y-1 \geq 0$  donc  $x = \left( \frac{2y-1}{2} \right)^2$

donc  $x = \left( y - \frac{1}{2} \right)^2$  Puisque l'équation  $f(x) = y$  admet une unique solution

donc :  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}^+$  vers  $\left[ \frac{1}{2}; +\infty \right[$  .et

$$f^{-1}: \left[ \frac{1}{2}; +\infty \right[ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto \left( x - \frac{1}{2} \right)^2$$

2)b)  $g$  est une bijection de  $\left[ \frac{1}{4}; +\infty \right[$  vers  $\left[ \frac{1}{2}; +\infty \right[$  en et

$$g^{-1}: \left[ \frac{1}{4}; +\infty \right[ \rightarrow \left[ \frac{1}{2}; +\infty \right[$$

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

c)  $h$  est la composée de deux bijections  $f$  et  $g$

donc  $h$  est une bijection de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\left[ \frac{1}{4}; +\infty \right[$

Et  $\forall x \in \mathbb{R}^+ :$

$$h^{-1}(x) = (g \circ f)^{-1}(x) = f^{-1} \circ g^{-1}(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)) = \left( \sqrt{x} - \frac{1}{2} \right)^2$$

Donc : la bijection réciproque  $h^{-1}$  de  $h$  est

$$h^{-1}: \left[ \frac{1}{4}; +\infty \right[ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto \left( \sqrt{x} - \frac{1}{2} \right)^2$$

**Exercice 26** : soient les applications :

$$f : ]1; +\infty[ \rightarrow ]1; +\infty[ \quad g : ]1; +\infty[ \rightarrow ]1; +\infty[$$

$$x \mapsto 1 + \frac{2}{\sqrt{x}-1} \quad \text{et} \quad x \mapsto \left( \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right)^2$$

1) Déterminer :  $f([2; 4[)$  et  $g^{-1}(\{9\})$

2) Montrer que  $f$  est une bijection de  $]1; +\infty[$  dans  $]1; +\infty[$  et déterminer sa bijection réciproque

3a) vérifier que :  $\forall x \in ]1; +\infty[ : g(x) = (f(x))^2$

3b) en déduire que :  $g$  est une bijection de  $]1; +\infty[$  dans  $]1; +\infty[$  et déterminer sa bijection réciproque

**Solution : 1)**

$$f([2; 4[) = \{f(x) / x \in [2; 4[ \} = \{f(x) / 2 \leq x < 4 \}$$

$$= \{f(x) / \sqrt{2}-1 \leq \sqrt{x}-1 < 1 \} = \{f(x) / 1 < \frac{1}{\sqrt{x}-1} \leq \frac{1}{\sqrt{2}-1} \}$$

$$= \{f(x) / 3 < f(x) \leq 3 + 2\sqrt{2} \}$$

$$\text{Donc : } f([2; 4[) = ]3; 3 + 2\sqrt{2}]$$

$$g^{-1}(\{9\}) = \{x \in ]1; +\infty[ / g(x) \in \{9\} \} = \{x \in ]1; +\infty[ / g(x) = 9 \}$$

$$g^{-1}(\{9\}) = \{x > 1 / \sqrt{x} = 2 \} = \{4\}$$

2) montrons que  $f$  est injective ?

soient  $x_1 \in ]1; +\infty[$  et  $x_2 \in ]1; +\infty[$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 1 + \frac{2}{\sqrt{x_1}-1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x_2}-1}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_1}-1 = \sqrt{x_2}-1 \Rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

donc  $f$  est injective

Montrons que  $f$  est surjective ?

$$\forall y \in ]1; +\infty[ \quad y = f(x) \Leftrightarrow x = \left( \frac{y+1}{y-1} \right)^2$$

Et on a :

$$\left( \frac{y+1}{y-1} \right)^2 - 1 = \left( \frac{y+1}{y-1} - 1 \right) \left( \frac{y+1}{y-1} + 1 \right) = \frac{4y}{(y-1)^2}$$

$$\text{Donc : } \forall y \in ]1; +\infty[ \left( \frac{y+1}{y-1} \right)^2 > 1 \text{ donc :}$$

$$(\forall y \in ]1; +\infty[)(\exists x \in ]1; +\infty[) / x = \left( \frac{y+1}{y-1} \right)^2 \text{ et } y = f(x)$$

Donc : que  $f$  est surjective de  $]1; +\infty[$  dans  $]1; +\infty[$

Détermination de sa bijection réciproque ?

$$\begin{cases} f(y) = x \\ y \in ]1; +\infty[ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ y \in ]1; +\infty[ \end{cases} \Leftrightarrow y = \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^2$$

$$f^{-1} : ]1; +\infty[ \rightarrow ]1; +\infty[$$

$$\text{Donc : } x \mapsto \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^2$$

3a) vérifier que :  $\forall x \in ]1; +\infty[ :$

$$(f(x))^2 = \left( 1 + \frac{2}{\sqrt{x}-1} \right)^2 = g(x)$$

3b) on a :  $g = h \circ f$  avec  $h(x) = x^2 \quad \forall x \in ]1; +\infty[ :$

Et puisque les applications  $f$  et  $h$  sont des bijections de  $]1; +\infty[$  dans  $]1; +\infty[$  alors  $g = h \circ f$  est une bijection de  $]1; +\infty[$  dans  $]1; +\infty[$

et on a :

$$g^{-1}(x) = (h \circ f)^{-1}(x) = f^{-1} \circ h^{-1}(x)$$

$$= f^{-1}(h^{-1}(x)) = \left( \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right)^2 = g(x)$$

**C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.**

**C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices**

**Que l'on devient un mathématicien**

