

ENSEMBLES ET APPLICATIONS

I) LES ENSEMBLES

1) Activité et définition

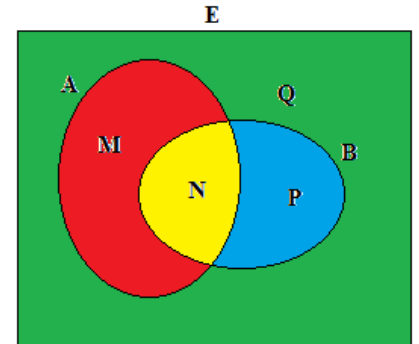
1.1 Activités :

Activité 1 :

Le diagramme ci-contre s'appelle le diagramme de Venn.

On a : $M = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\}$

- Définir de la même façon les ensembles N, P et Q en fonction de A et B .
- Déterminer les ensembles A et B en fonction des ensembles M, N, P et Q
- Que pouvez-vous dire des ensembles P et M .



Activité 2 :

Soient les ensembles : $H = \{y \in \mathbb{R} / y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} ; \text{où } x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{y \in \mathbb{R} / y = \frac{1}{1+\sqrt{x^2+1}} ; \text{où } x \in \mathbb{R}\}$

- On se propose de montrer que : $H =]0,1]$.
 - Considérer un élément $y_0 \in H$ et montrer que $y_0 \in]0,1]$
 - Considérer un élément $y_0 \in]0,1]$ et montrer que $y_0 \in H$
- Monter que $G \subset H$
- Est-ce que $G = H$?

Activité 3 :

Soient $A = \{\frac{5n+8}{8n-1} / n \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{\frac{2n+4}{2n+1} / n \in \mathbb{N}\}$

- Est ce que : $\frac{17}{3} \in A$? ; $\frac{43}{25} \in B$? ; $\frac{38}{47} \in B$?
- Déterminer les éléments communs entre A et B .
- Déterminer tous les entiers naturels qui appartiennent à B .

1.2 Vocabulaires

- Un ensemble E est une **collection** ou un **groupement** d'objets distincts ; ces objets s'appellent les **éléments** de cet ensemble.
- Si x est élément d'un ensemble E , on dit que x **appartient** à E et on écrit : $x \in E$,
- \emptyset est l'ensemble qui ne contient aucun élément, on peut le définir comme suite : $\{x \in E \text{ et } x \notin E\}$.
- Un ensemble peut être défini
 - En extension**, c'est-à-dire en donnant la liste de ses éléments entre accolades.
Par exemple : $E = \{a, b, n, p\}$
 - En compréhension** c'est-à-dire par une propriété caractérisant ses éléments.
Par exemple : $E = \{x \in \mathbb{Z} / |3k + 1| \leq 5\}$

2) Egalité ; inclusion ; ensemble des partie d'un ensemble

Définition :

On dit que deux ensembles E et F sont égaux s'ils ont exactement les mêmes éléments ; on écrit $E = F$
 $(E = F) \Leftrightarrow (x \in E \Leftrightarrow x \in F)$

Exemple :

$$A = \{k \in \mathbb{Z} / |2k + 1| \leq 3\} \quad B = \{-2, -1, 0, 1\}; A = B$$

Définition :

Soient E et F deux ensembles quelconques. E est dit **inclus** dans F si tout élément de E est un élément de F . On dit aussi que E est un **sous-ensemble** de F ou encore que E est une **partie** de F . On note $E \subset F$
 $(E \subset F) \Leftrightarrow (x \in E \Rightarrow x \in F)$.

Activité :

Soit $E = \{1, 2, 3\}$ déterminer tous les ensembles inclus dans E .

Définition :

Soit E un ensemble, les parties de E , constituent un ensemble qui s'appelle ensemble des parties de E et se note $\mathcal{P}(E)$.

$$\mathcal{P}(E) = \{X / X \subset E\}$$

Remarque :

A est une partie de E ($A \subset E$) si et seulement si A est un élément de $\mathcal{P}(E)$

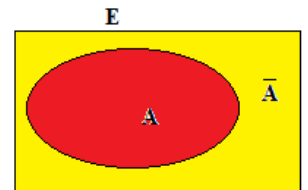
Exercice : Déterminer $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\})))$

3) Complémentaire d'un ensemble

Définition :

Soit A une partie de E , le complémentaire de A est l'ensemble constitué par tous les éléments de E qui n'appartiennent pas à A , on le note \bar{A} ou $C_E A$.

$$\bar{A} = \{x \in E / x \notin A\}$$



Exemples :

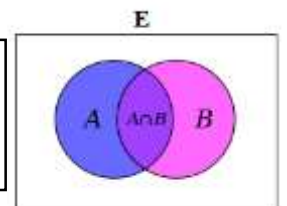
- Si E un ensemble quelconque : $\bar{\bar{E}} = \emptyset$ et $\bar{\emptyset} = E$
- $C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q} = \mathbb{I}$ (ensembles des irrationnelles).

4) Intersection ; réunion , différence de deux ensembles.

Définition :

Soient A et B deux parties d'un ensemble E ; l'**intersection** de A et B est l'ensemble constitué par les éléments qui appartiennent à la fois à A et à B . On le note par $A \cap B$.

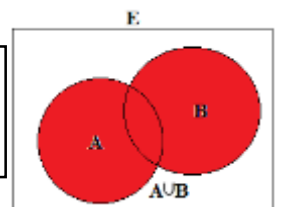
$$A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}$$



Définition :

Soient A et B deux parties d'un ensemble E ; la **réunion** de A et B est l'ensemble constitué par les éléments qui appartiennent à A ou à B . On le note par $A \cup B$.

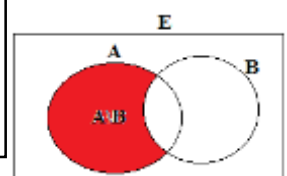
$$A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}$$



Définition :

Soient A et B deux parties d'un ensemble E ; la **différence** de A et B est l'ensemble constitué par les éléments qui appartiennent à A et qui n'appartiennent pas à B . On le note par $A \setminus B$ ou $A - B$

$$A \setminus B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\}$$



5) Propriétés

5.1 Propriétés d'inclusion.

Soient E , un ensemble, A, B et C des parties de E .

- $(A = B) \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$
- $\begin{cases} A \subset B \\ B \subset C \end{cases} \Rightarrow (A \subset C)$ *la transitivité*

5.2 Intersection et réunion

- $A \cap A = A$
- $A \cup A = A$
- Si $A \subset B$ alors $A \cap B = A$ et $A \cup B = B$
- $A \cap B \subset A \subset A \cup B$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ *L'associativité*
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *L'associativité*
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *la distributivité*
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *la distributivité*

5.3 Le complémentaire

- $\bar{A} = E/A$
- $\bar{\bar{A}} = A$
- $\bar{\emptyset} = E$ $\bar{E} = \emptyset$
- $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$ *loi de Morgan*
- $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$ *loi de Morgan*
- $(A \subset B) \Leftrightarrow (\bar{B} \subset \bar{A})$

Exercice : Démontrer les deux dernières assertions.

5.4 La différence

- $A/B = A/(A \cap B)$
- $A/B = (A \cap \bar{B})$

6) Notations généralisées.

Soient $A_1, A_2 \dots A_n$ une famille de parties d'un ensemble E , (qu'on peut noter $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$)

L'ensemble : $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ se note : $\bigcup_{i=1}^n A_i$

L'ensemble : $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ se note : $\bigcap_{i=1}^n A_i$

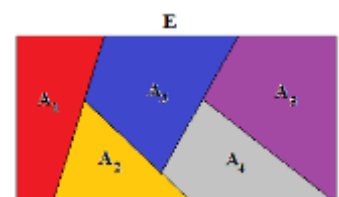
Définition :

Une famille $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ de parties d'un ensemble E s'appelle **une partition** de l'ensemble E si elle vérifie :

- $\bigcup_{i=1}^n A_i = E$
- $(i \neq j) \Rightarrow (A_i \cap A_j = \emptyset)$ on dit que les ensembles sont disjoints deux à deux.

Exemple :

- Les $(A_i)_{1 \leq i \leq 5}$ dans le diagramme ci-contre, forment une partition de E
- Les intervalles $]k, k + 1]$ où $k \in \mathbb{Z}$ forment une partition de \mathbb{R}



7) Produit cartésien

Définition :

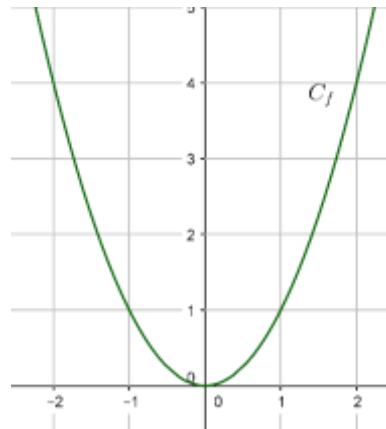
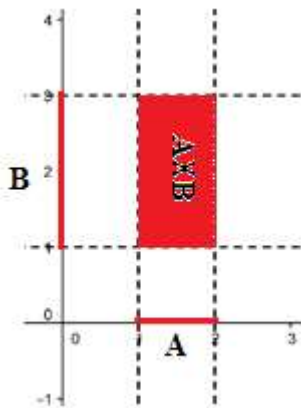
Soient A et B deux ensembles ; le **produit cartésien de A et B** est l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in A$ et $y \in B$, On le note par $A \times B$.

$$A \times B = \{(x, y) / x \in A \text{ et } y \in B\}$$

Le carré cartésien d'un ensemble A est l'ensemble $A \times A$ noté A^2

Exemples

$$A = [1, 2] ; B = [1, 3]$$



C_f est la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2$

$$C_f = \{(x, y) / x \in \mathbb{R} \text{ et } y = x^2\}$$

Généralisation :

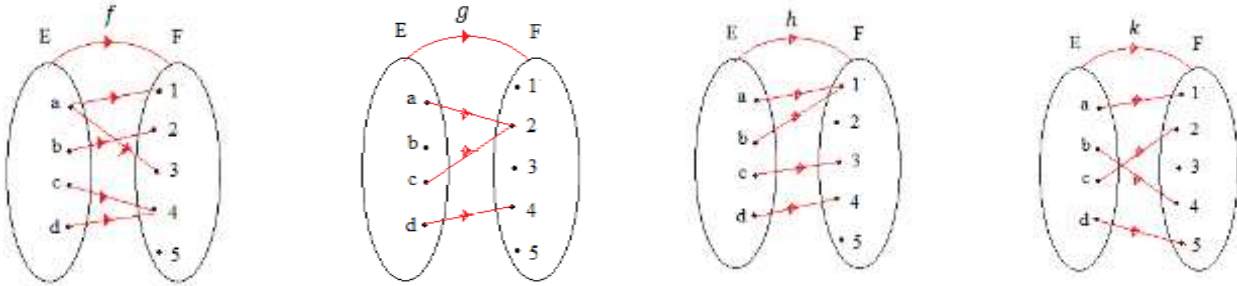
- Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'ensembles ; $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ se note $\prod_{i=1}^n A_i = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_i \in A_i\}$.
- $A \times A \times \dots \times A = A^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_i \in A\}$.

II) LES APPLICATIONS

1) Activités

Activité 1 :

Considérons les ensembles $E = \{a, b, c, d\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, f, g, h et k sont des relations de E dans F .



Que pouvez-vous dire des relations ci-dessus ?

Activité 2 :

Soit la fonction f définie par :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$$

1- Montrer que chaque élément de \mathbb{R} a une image.

2- l'implication suivante est-elle vraie : (P) $(a \neq b) \Rightarrow (f(a) \neq f(b))$

3- Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) (f(x) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right])$

4- Montrer que $(\forall y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]) (\exists x \in \mathbb{R}) (f(x) = y)$

2) Définitions et vocabulaires

2.1 Application

Définition :

Soient E et F deux ensembles non vides, on appelle application toute relation f de E dans F tel que : tout élément x de E est relié à un unique élément y de F .

Vocabulaire :

$$f: E \rightarrow F$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

- L'ensemble E s'appelle **ensemble de départ** de l'application f .
- L'ensemble F s'appelle **ensemble d'arrivée** de l'application f .
- $y = f(x)$ s'appelle **l'image de x** par l'application f .
- x s'appelle **l'antécédent** de y par l'application f .

2.2 Egalité de deux applications

Activité :

Soient les deux applications suivantes:

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$n \mapsto (-1)^n \cdot n$$

$$g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$n \mapsto \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ -n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N})(f(n) = g(n))$

Définition :

On dit que deux applications f et g sont égales si :

- Elles ont le même ensemble de départ E
- Elles ont le même ensemble d'arrivée F
- $(\forall x \in E)(f(x) = g(x))$.

Remarque :

Les 3 applications :

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto x^2$$

$$h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto x^2$$

Sont différentes.

Définition :(injection)

Soit f une application de E dans F , on dit que f est **injective** de E dans F si :

$$(\forall (x_1, x_2) \in E^2)(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)) \text{ (P)}$$

Par contraposition on peut dire que :

$$(\mathbf{f \text{ est injective}}) \Leftrightarrow (\forall (x_1, x_2) \in E^2)(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$$

Exemples :

❶ $f: \mathbb{R}/\{2\} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{3x+1}{x-2}$ Montrer que f est injective

❷ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2 + 4$ g est-elle injective ?

❸ $h: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}$
 $n \mapsto 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

1- déterminer les images des entiers 1, 2, 3

2- Montrer que $n > m \Rightarrow h(n) > h(m)$

3- En déduire que h est injective.

Définition :(surjection)

Soit f une application de E dans F , on dit que f est **surjective** de E dans F si tout élément y de F admet un antécédent dans E .

$$(\forall y \in F)(\exists x \in E)(f(x) = y)$$

Autrement dit : Pour tout y dans F l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution dans E .

Exercices :

$$\textcircled{1} \quad f: \mathbb{R}/\{2\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{3x+1}{x-2}$$

1- f est-elle surjective de $\mathbb{R}/\{2\}$ vers \mathbb{R} .

2- Modifier l'ensemble d'arrivée pour définir une application surjective.

$$\textcircled{2} \quad g: \mathbb{R} \rightarrow [2, +\infty[$$

$$x \mapsto x^2 - 2x + 3$$

1- Montrer que la fonction g est surjective.

2- g est-elle injective ?

$$\textcircled{3} \quad h: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q} \cap [1, +\infty[$$

$$n \mapsto 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \quad h \text{ est-elle surjective ?}$$

Définition : (bijection)

Soit f une application de E dans F , on dit que f est une **bijection** de E dans F si elle **injective et surjective**

Propriété :

Une application est une bijection de E dans F si et seulement si :

$$(\forall y \in F)(\exists! x \in E)(f(x) = y)$$

Autrement dit : Pour tout y dans F l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans E .

Exercice :

$$f: [1, +\infty[\rightarrow [2, +\infty[$$

$$x \mapsto x^2 - 2x + 3$$

1- Montrer que f est une bijection de $[1, +\infty[$ vers $[2, +\infty[$.

2- Soit y un élément de $[2, +\infty[$, déterminer (en fonction de y) l'élément x dans $[1, +\infty[$ tel que $f(x) = y$

L'application qui lie l'élément y de $[2, +\infty[$, à l'élément unique x de $[1, +\infty[$ et solution de l'équation $f(x) = y$ s'appelle : **la bijection réciproque de la bijection f** et se note : f^{-1}

Définition :

Si f est une bijection de E dans F ; L'application de F dans E qui lie chaque élément y par l'élément x de E qui est solution unique de l'équation $f(x) = y$ s'appelle la bijection réciproque de la bijection f et se note f^{-1} .

f bijection de E dans F ; f^{-1} sa bijection réciproque on a : $\begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ y \in F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = y \\ x \in E \end{cases}$

Exercice 1:

Déterminer la fonction réciproque de la fonction

$$f: [1, +\infty[\rightarrow [2, +\infty[$$

$$x \mapsto x^2 - 2x + 3$$

Exercice 2 :

Soit la fonction : $g: [1, +\infty[\rightarrow]0, \frac{1}{2}]$
 $x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$

Montrer que g est une application

Montrer que l'application g est une bijection de $[1, +\infty[$ vers $]0, \frac{1}{2}]$ puis déterminer sa bijection réciproque.

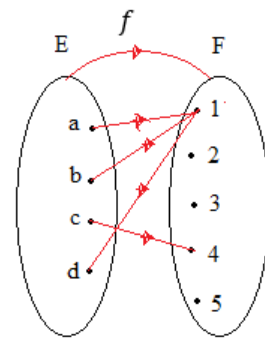
3) L'image directe et l'image réciproque d'un ensemble par une application

3.1 Activité

Activité 1 :

Soit f l'application dont le diagramme sagittal est représenté ci-contre

- Déterminer les images directes des ensembles $\{a, b, c\}$, $\{b, c\}$ et E
- Déterminer les antécédents des éléments qui appartiennent aux ensembles : $\{1\}$; $\{1,3\}$; $\{2,3\}$ $\{1,4\}$



Activité 2 :

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 2x^2 - x$

- Montrer que : $(\forall x \in [-1,1])(f(x) \in [-\frac{3}{16}, 3])$
- Montrer que : $(\forall y \in [-\frac{3}{16}, 3])(\exists x \in [-1,1])(f(x) = y)$

on dit que l'image de l'intervalle $[-1,1]$ par l'application f est l'intervalle $[-\frac{3}{16}, 3]$ et on écrit : $f([-1,1]) = [-\frac{3}{16}, 3]$

Activité 3 :

Soit $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto \frac{1}{x^2+y^2}$

- Déterminer les couples (x, y) qui vérifient $h((x, y)) = 1$
- Représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé les points $M(x, y)$ qui vérifient $h((x, y)) = 1$.

Définition :

Soit f une application de E dans F , A une partie de E et B une partie de F .

- L'image directe de l'ensemble A est l'ensemble $f(A) = \{f(x) \in F / x \in A\}$
- L'image réciproque de l'ensemble B est l'ensemble $f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$

Remarque :

❶ Soit f une application de E dans F , A une partie de E et B une partie de F .

$$f(A) = B \Leftrightarrow \begin{cases} f(A) \subset B \\ B \subset f(A) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\forall x \in A)(f(x) \in B) \\ ((\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y)) \end{cases}$$

② $f(A) = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$ mais si $f^{-1}(B) = \emptyset$, on ne peut pas dire que $B = \emptyset$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x^2 + 1 \quad \text{on a : } f^{-1}(\mathbb{R}^-) = \emptyset$$

③ Pour parler de l'image réciproque **d'un élément** par une application, il faut que f soit **bijective** mais on peut considérer l'image réciproque d'un ensemble quel que soit la nature de l'application f .

Propriété :

Soit f une application de E dans F .

f est surjective de E dans F , si et seulement si $f(E) = F$.

Preuve :

On a : f une application de E dans F donc : $f(E) \subset F$; si de plus f est surjective alors :

$$(\forall y \in F)(\exists x \in E)(f(x) = y) \quad \text{et donc } F \subset f(E). \text{ D'où } f(E) = F$$

Réciproquement si $f(E) = F$ alors $F \subset f(E)$ et par suite : $(\forall y \in F)(\exists x \in E)(f(x) = y)$ donc f est surjective.

Exercice

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{3}{1+x^2}$ déterminer $f^{-1}([1,2])$

4) Restriction ; Prolongement d'une application

Activité 1:

Soit l'application $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 3|1 - x^2| + x$

Ecrire l'expression de f sur $[-1,1]$

Activité 2 :

Soit l'application $g: \mathbb{R}/\{1\} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{3x+1}{x-1}$

1- g est-elle bijective ?

2- A partir de g , définir une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R}

Définition :

Soit f une application de E dans F

- Soit A une partie de E , l'application définie de A vers F , qui associe à tout élément x de A l'élément $f(x)$, s'appelle **la restriction de f sur l'ensemble A** .
- Soit Γ un ensemble tel que $E \subset \Gamma$, l'application définie de Γ vers F , qui associe à tout élément x de E l'élément $f(x)$, s'appelle **un prolongement de f sur l'ensemble Γ** .

7) La partie entière d'un réel.

Théorème :

On admet la proposition suivante : $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists ! k \in \mathbb{Z})(k \leq x < k + 1)$.

Définition :

L'entier relatif k qui vérifie le théorème précédent s'appelle **la partie entière du réel x** ; on le note $[x]$ ou $E(x)$.
L'application qui lie chaque élément x de \mathbb{R} à $E(x)$ dans \mathbb{Z} s'appelle l'application partie entière.

Exemple :

$$E(\sqrt{2}) = 1; \quad E(\pi) = 3; \quad E(-\pi) = -4; \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \left(E\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \right); \quad (\forall k \in \mathbb{Z})(E(k) = k)$$

Exercices :

❶ Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall m \in \mathbb{Z})(E(m+x) = m + E(x))$.

❷ Vérifier par un contre-exemple que : $E(x+y) \neq E(x) + E(y)$

❸ Soit l'application
$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto E\left(3x + \frac{1}{2}\right) + 1$$

1- Vérifier que h n'est pas injective.

2- Donner la restriction de h sur l'intervalle $[0, \frac{1}{3}[$.

3- Déterminer : $h^{-1}\{4\}$ et $h^{-1}\{2\}$; h est-elle surjective ?.

8) Composition de deux applications.**Activité :**

Soient les deux applications :

$$f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g: \mathbb{R}/\{1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{x}{x-1}$$

1- Déterminer $f(g(3))$; $f(g(-1))$; $g(f(3))$

2- Donner la condition sur x pour que le réel $g(f(x))$ existe.

3- Donner la condition sur x pour que le réel $f(g(x))$ existe.

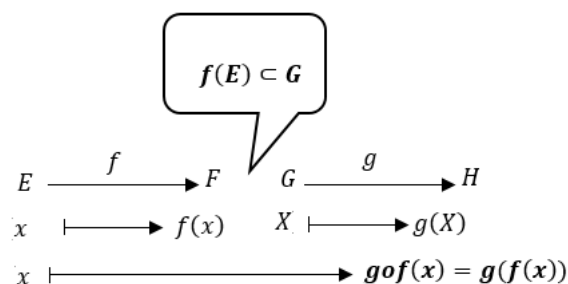
4- Déterminer les application $f \circ g$ et $g \circ f$.

Définition :

Soient f une application de E dans F et g une application de G dans H tel que : $f(E) \subset G$, l'application h définie de E vers H par : pour tout x dans E , $h(x) = g(f(x))$ s'appelle la composition des deux applications f et g et se note $g \circ f$.

$$(\forall x \in E)((g \circ f)(x) = g(f(x)))$$

On peut représenter la composition par :



Propriété :

- La composition de deux applications injectives est une application injective
- Si $F = G$ alors La composition de deux applications surjectives est une application surjective
- La composition de deux bijections f et g est une bijection et $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$

Preuves : En exercice.**Propriété :**

- La composition des applications est associative : $(fog)oh = fo(goh)$
- La composition des applications n'est pas commutative : $fog \neq gof$

Propriété :

Si f est une bijection de E dans F et f^{-1} sa bijection réciproque :

- $(\forall x \in E)((f^{-1}of)(x) = x)$, $f^{-1}of$ s'appelle **l'identité de E** et s note $\mathcal{I}d_E$
- $(\forall x \in F)(fof^{-1})(x) = x)$, fof^{-1} s'appelle **l'identité de F** et s note $\mathcal{I}d_F$
- Si $E = F$ alors : $f^{-1}of = fof^{-1} = \mathcal{I}d_E$

