Droites et plans de l'espace

Droites de l'espace

• Soient A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace. La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires.

• Si $\mathscr{D}$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(\neq \vec{0})$ et $\mathscr{D}'$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}'(\neq \vec{0})$:

- $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires.
- $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont orthogonales si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont orthogonaux.

Représentation paramétrique d'une droite de l'espace

Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace et $\vec{u}(a, b, c)$ un vecteur non nul de l'espace. La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Réciproquement, l'ensemble des points de l'espace de représentation paramétrique $\begin{cases} x = \alpha + ta \\ y = \beta + tb \\ z = \gamma + tc \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$ où l'un au moins des trois réels a, b ou c est non nul est la droite passant par le point $A(\alpha, \beta, \gamma)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a, b, c)$.

Plans de l'espace

Equation cartésienne d'un plan défini par un point et un vecteur normal

- Un vecteur normal à un plan $\mathscr{P}$ est un vecteur **non nul** orthogonal à toute droite de $\mathscr{P}$. Deux vecteurs normaux à un même plan $\mathscr{P}$ sont colinéaires.
- Soient A un point de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur non nul de l'espace. Le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que

$$\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0.$$

- Si dans un repère othonormal le point A a pour coordonnées (x_A, y_A, z_A) et le vecteur $\vec{n}$ a pour coordonnées (a, b, c) (l'un des trois réels a, b ou c n'étant pas nul), une équation cartésienne du plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

- Dans un repère orthonormal, tout plan de l'espace admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où l'un des trois réels a, b ou c n'est pas nul. Réciproquement, l'ensemble d'équation $ax + by + cz + d = 0$ où l'un des trois réels a, b ou c n'est pas nul est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$.

Parallélisme et perpendicularité de deux plans ou d'un plan et d'une droite

$\mathscr{P}$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}$ et $\mathscr{P}'$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}'$.

- $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires.
- $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux.

$\mathscr{P}$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}$ et $\mathscr{D}$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.

- $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ sont parallèles si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux.
- $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.
  $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathscr{P}$.
  Dans ce cas, $\mathscr{D}$ est orthogonale à toute droite contenue dans $\mathscr{P}$.

Distance d'un point à un plan

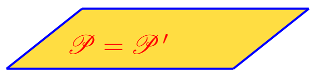
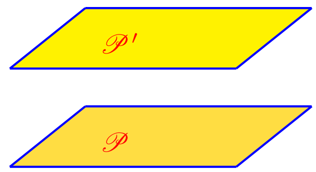
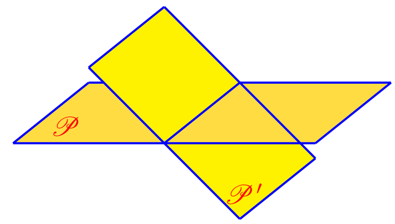
Soient $\mathscr{P}$ un plan et M_0 un point. La distance de M_0 au plan $\mathscr{P}$ est la distance de M_0 au projeté orthogonal H du point M_0 sur le plan $\mathscr{P}$. Cette distance est la plus courte distance de M_0 à un point quelconque de $\mathscr{P}$.

Si dans un repère othonormal le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ (l'un des trois réels a, b ou c n'étant pas nul) et M_0 a pour coordonnées (x_0, y_0, z_0) alors la distance de M_0 à $\mathscr{P}$ est

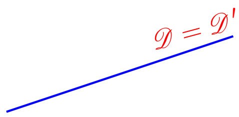
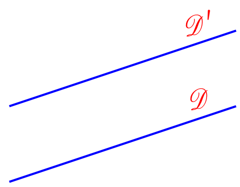
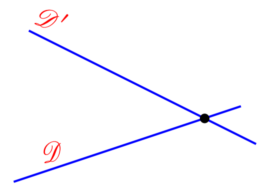
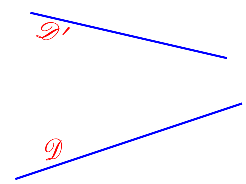
$$d(M_0, \mathscr{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Positions relatives de droites et de plans

Deux plans

<table>
<tr><th colspan="2">Plans parallèles</th><th>Plans non parallèles</th></tr>
<tr><th>confondus</th><th>strictement parallèles</th><th>sécants en une droite</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

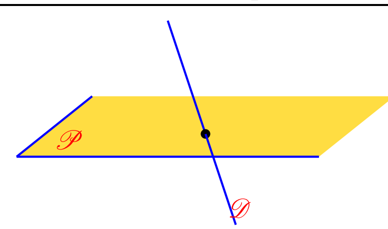
Deux droites

<table>
<tr><th colspan="2">Droites parallèles</th><th colspan="2">Droites non parallèles</th></tr>
<tr><th>confondues</th><th>strictement parallèles</th><th>sécantes</th><th>non coplanaires</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr><td colspan="3">coplanaires</td><td>non coplanaires</td></tr>
</table>

En particulier,

- si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ n'ont aucun point en commun, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ peuvent être strictement parallèles ou non coplanaires,
- si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ peuvent être sécantes ou non coplanaires.

Une droite et un plan

<table>
<tr><th colspan="2">Plans et droites parallèles</th><th>Plans et droites non parallèles</th></tr>
<tr><th>droite incluse</th><th>strictement parallèles</th><th>sécants en un point</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Dans cette fiche, on n'a pas rappelé la notion de demi-espace $(ax + by + cz + d > 0)$ ni les positions relatives de trois plans de l'espace.