Trigonométrie circulaire

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 (*IT)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, 2\pi]$ les équations suivantes :

1) $\sin x = 0$ **2)** $\sin x = 1$ **3)** $\sin x = -1$ **4)** $\cos x = 1$ **5)** $\cos x = -1$
6) $\cos x = 0$ **7)** $\tan x = 0$ **8)** $\tan x = 1$.

Exercice n° 2 (*IT)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, 2\pi]$ les équations suivantes :

1) $\sin x = \frac{1}{2}$ **2)** $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ **3)** $\tan x = -1$ **4)** $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ **5)** $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **6)** $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice n° 3 (IT)**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans I les équations suivantes :

1) $\sin(2x) = \frac{1}{2}$, $I = [0, 2\pi]$ **2)** $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $I = [0, 4\pi]$ **3)** $\tan(5x) = 1$, $I = [0, \pi]$
4) $\cos(2x) = \cos^2 x$, $I = [0, 2\pi]$ **5)** $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$, $I = [0, 2\pi]$ **6)** $\cos(nx) = 0$ $(n \in \mathbb{N}^*)$
7) $|\cos(nx)| = 1$ **8)** $\sin(nx) = 0$ **9)** $|\sin(nx)| = 1$
10) $\sin x = \tan x$, $I = [0, 2\pi]$ **11)** $\sin(2x) + \sin x = 0$, $I = [0, 2\pi]$ **12)** $12\cos^2 x - 8\sin^2 x = 2$, $I = [-\pi, \pi]$.

Exercice n° 4 (IT)**

Résoudre dans I les inéquations suivantes :

1) $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$, $I = [-\pi, \pi]$ **2)** $\sin x \geqslant -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $I = \mathbb{R}$ **3)** $\cos x > \cos\frac{x}{2}$, $I = [0, 2\pi]$
4) $\cos^2 x \geqslant \cos(2x)$, $I = [-\pi, \pi]$ **5)** $\cos^2 x \leqslant \frac{1}{2}$, $I = [0, 2\pi]$ **6)** $\cos\frac{x}{3} \leqslant \sin\frac{x}{3}$, $I = [0, 2\pi]$.

Exercice n° 5 (*I)

Calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

Exercice n° 6 (*I)

Calculer $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice n° 7 (***)

Montrer que $\sum \cos(a_1 \pm a_2 \pm ... \pm a_n) = 2^n \cos a_1 \cos a_2 ... \cos a_n$ (la somme comporte 2^n termes).

Exercice n° 8 (*I)**

1) Calculer $\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$ pour a élément donné de $]0, 2\pi[$ (penser à $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$).

2) Pour $a \in]0, \pi[$, déterminer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right)$.

Exercice n° 9 (**)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2^{4\cos^2 x+1} + 16 \times 2^{4\sin^2 x-3} = 20$.

Exercice n° 10 (***)

Soit a un réel distinct de $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

1) Calculer $\tan(3\theta)$ en fonction de $\tan\theta$

PROF: ATMANI NAJIB

.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = \frac{3a - a^3}{1 - 3a^2}.$$

On trouvera deux méthodes, l'une algébrique et l'autre utilisant la formule de trigonométrie établie en 1).

Exercice n° 11 (***) Combien l'équation

$$\tan x + \tan(2x) + \tan(3x) + \tan(4x) = 0,$$

possède-t-elle de solutions dans $[0, \pi]$?

Exercice n° 12 (I)**

Calculer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

1) $x \mapsto \cos^2 x$ **2)** $x \mapsto \cos^4 x$ **3)** $x \mapsto \sin^4 x$ **4)** $x \mapsto \cos^2 x \sin^2 x$ **5)** $x \mapsto \sin^6 x$
6) $x \mapsto \cos x \sin^6 x$ **7)** $x \mapsto \cos^5 x \sin^2 x$ **8)** $x \mapsto \cos^3 x$.

Exercice n° 13 (*I)**

Calculer $I = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^4 x \sin^6 x \, dx$ et $J = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^4 x \sin^7 x \, dx$.

Exercice n° 14 (**)

Démontrer les identités suivantes, en précisant à chaque fois leur domaine de validité :

1) $\dfrac{1 - \cos x}{\sin x} = \tan \dfrac{x}{2}$ **2)** $\sin\left(x - \dfrac{2\pi}{3}\right) + \sin x + \sin\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) = 0$

3) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) + \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = \dfrac{2}{\cos(2x)}$ **4)** $\dfrac{1}{\tan x} - \tan x = \dfrac{2}{\tan(2x)}$.

Exercice n° 15 (***)

Soit k un réel distinct de -1 et de 1.

1) Etudier les variations de $f_k \ : \ x \mapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{1 - 2k\cos x + k^2}}$.

2) Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} f_k(x) \, dx$.

Exercice n° 16 (*I)**

Calculer les sommes suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$, ($x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ donnés).

2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin^2(kx)$, ($x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ donnés).

3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(kx)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(kx)$, ($x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ donnés).

Exercice n° 17 (***)

Résoudre le système $\begin{cases} \cos a + \cos b + \cos c = 0 \\ \sin a + \sin b + \sin c = 0 \end{cases}$ où a, b et c sont trois réels.

Exercice n° 18 (**)

Montrer que $\cos^4 \dfrac{\pi}{8} + \cos^4 \dfrac{3\pi}{8} + \cos^4 \dfrac{5\pi}{8} + \cos^4 \dfrac{7\pi}{8} = \dfrac{3}{2}$.

Exercice n° 19 (***)

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(3x) = \sin(2x)$.

2) En déduire les valeurs de $\sin x$ et $\cos x$ pour x élément de $\left\{\dfrac{\pi}{10}, \dfrac{\pi}{5}, \dfrac{3\pi}{10}\right\}$.

Exercice n° 20 (*IT)**

Etude complète et graphe des fonctions suivantes :

1) $f_1 \ : \ x \mapsto 2\cos(x) + \cos(2x)$ **2)** $f_2 \ : \ x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{2 - \cos(x)}$

3) $f_3 \ : \ x \mapsto |\tan(x)| + \cos(x)$ **2)** $f_4 \ : \ x \mapsto \dfrac{2\sin(x) + 1}{2\cos(x) + 1}$