



**Exercice01** : 1) Déterminer et dénombrer les diviseurs naturels de 156

12) Déterminer dans  $\mathbb{Z}$  tous les diviseurs de -8

**Exercice02** :

1)  $a \in \mathbb{Z}$  et  $b \in \mathbb{Z}$  et  $c \in \mathbb{Z}$  et  $x \in \mathbb{Z}$  et  $y \in \mathbb{Z}$

a) montrer que si  $\frac{a}{2b+c}$  et  $\frac{a}{b+c}$  alors  $\frac{a}{c}$

b) montrer que si  $\frac{a}{2b+3c}$  et  $\frac{a}{b+c}$  alors  $\frac{a}{c}$

c) montrer que si  $\frac{a}{x-y}$  et  $\frac{a}{b-c}$  alors  $\frac{a}{xb-cy}$

2)  $a \in \mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{N}$  et  $\frac{a}{12n+1}$  et  $\frac{a}{-2n+3}$

Montrer que  $\frac{a}{19}$

3)  $d \in \mathbb{Z}$  et  $a \in \mathbb{Z}$  et  $\frac{d}{n^2+3}$  et  $\frac{d}{2n-1}$

Montrer que  $\frac{d}{13}$

**Exercice03** :  $a \in \mathbb{Z}$  et  $x \in \mathbb{Z}$

Montrer que :  $\begin{cases} \frac{a}{5x-7} \Rightarrow \frac{a}{29} \\ \frac{a}{2x+3} \end{cases}$

**Exercice04** : Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$  :

3 divise  $4^n - 1$

**Exercice05** : Quelles sont les valeurs de l'entier relatif  $n$  pour lesquelles :  $n+2/3n+1$

**Exercice 06** : Quelles sont les valeurs de l'entier relatif  $n$  pour lesquelles la fraction  $\frac{3n+8}{n+4}$

Représente un entier relatif ?

**Exercice07** : Résoudre dans  $\mathbb{N}^2$  les équations suivantes : a)  $x^2 - y^2 = 32$  avec  $x > y$

b)  $2xy + 2x + y = 99$

**Exercice08** : Déterminer les restes dans la division par 9 des nombres suivants :  $23451^{100}$  ;  $100^{23451}$  ;  $23451^{100} + 100^{23451}$

**Exercice09** : 1) Montrer que :  $5^8 \equiv -1 [17]$

2) Déterminer les restes dans la division par 17 des nombres suivants :  $5^{16}$  ;  $5^{500}$ .

**Exercice10** :  $a \in \mathbb{N}$  et  $b \in \mathbb{N}$  Si 17 est le reste de la division euclidienne de  $a$  par 19 Et Si 15 est le reste de la division euclidienne de  $b$  par 19 Déterminer le reste de la division euclidienne des nombres suivants par 19 :

1)  $a+b$     2)  $a^2+b^2$     3)  $2a-5b$

**Exercice11** : Déterminer le reste de la division

du nombres  $3^{2007}$  par 2 et par 13

**Exercice12** : Déterminer le reste de la division du nombres  $73^{2019}$  par 7

**Exercice13** : Déterminer le reste de la division du nombres  $19^{52} \times 23^{41}$  par 7

**Exercice14** : Déterminer le reste de la division par 5 du nombres  $22^{33} + 33^{22}$

**Exercice15**: Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$  3 divise  $4^n - 1$

**Exercice16** : 1) Déterminer et discuter suivants les valeurs de l'entier naturel  $n$  le reste de la division par 7 du nombres  $3^n$

2) en déduire le reste de la division par 7 du nombres  $2019^{2019}$

**Exercice17**: Résoudre les équations

suitantes dans  $\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$  : 1)  $\bar{2}x = \bar{3}$  2)  $x^2 + \bar{3}x = \bar{0}$

3)  $\bar{2013}x^3 + \bar{2}x = \bar{k}$

**Exercice18** : Résoudre dans  $\left(\frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}\right)^2$  l'équations

suitants :  $x + \bar{3}y = \bar{1}$

**Exercice19** : Résoudre dans  $\left(\frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}\right)^2$  les système

suitants :  $\begin{cases} \bar{3}x + \bar{2}y = \bar{1} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases}$

**Exercice20** : 1) Déterminer et discuter suivants les valeurs de l'entier naturel  $n$  le reste de la division par 10 du nombres  $3^n$

2) en déduire le chiffre des unités du nombres  $2019^{2020}$

3) Déterminer les valeurs de l'entier naturel  $n$  tel que :  $3^n + 5n + 2 \equiv 0 [10]$

**Exercice21** : Déterminer le chiffre des unités du nombres  $24537^{2018}$

**Exercice22** : Déterminer tous les entiers naturels  $n$  tel que :  $2^n \equiv n^2 [9]$

**Exercice23** : Résoudre dans  $\mathbb{N}$  l'équations suivante :  $3^n + 5n + 1 \equiv 0 [8]$

**Exercice24** : Quel est le reste de la division du nombre  $22^{33} \times 33^{22}$  par 5?

**Exercice25** : Quel est le reste de la division du nombre  $3^{2019}$  par 2 et par 13?

**Exercice26** : 1) montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$   $2^{2n} + 6n - 1$  Est divisible par 9

2) En déduire que :  $4^n \equiv 3n + 1 [9]$

**Exercice27 :** Quel est le reste de la division du nombre  $1653^{351} + 43^{137}$  par 11?

**Exercice28:**  $n \in \mathbb{N}$  on pose  $U_n = 4^n - 3n - 1$

1)montrer que  $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = 4U_n + 9n$

2) En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 9$  divise  $4^n - 3n - 1$

**Exercice29 :**montrer que

$$\frac{7}{1^{2019} + 2^{2019} + 3^{2019} + 4^{2019} + 5^{2019} + 6^{2019}}$$

**Exercice30 :**  $n \in \mathbb{N}$  on pose  $\alpha_n = n^4 - n^2 + 16$

1)montrer que  $\forall n \in \mathbb{N} \quad n^2 + 3n + 4$  et  $n^2 - 3n + 4$

Sont des nombres pairs

2) En déduire que  $\alpha_n = n^4 - n^2 + 16$  n'est pas

Premier

**Exercice31 :** montrer que  $\forall a \in \mathbb{Z} \quad a \wedge (a+1) = 1$

**Exercice32 :**  $n \in \mathbb{N}$  On considère les deux

nombres :  $A = n^2 + 3$  et  $B = n + 2$

1) montrer que  $A \wedge B = (n+2) \wedge 7$

2) déterminer l'entier naturel  $n$  tel que :  $\frac{n^2+3}{n+2} \in \mathbb{N}$

**Exercice33:**  $a = (25^n - 1)(36^n - 1)$  et  $b = (5^n - 1)(6^n - 1)$

Calculer les  $a \vee b \quad (n \in \mathbb{N})$

**Exercice34 :** Résoudre dans  $\mathbb{N}^2$  les équations

suivantes : a)  $x^2 - y^2 = 32$  avec  $x \succ y$

b)  $2xy + 2x + y = 99$

**Exercice35 :** Quelles sont les valeurs de l'entier relatif  $n$  pour lesquelles :  $n + 2/3n + 1$

**Exercice 36 :** Quelles sont les valeurs de l'entier relatif  $n$  pour lesquelles la fraction  $\frac{3n+8}{n+4}$

Représente un entier relatif ?

**Exercice37 :**déterminer :  $d = (-8316) \wedge 1080$

et  $m = 8316 \vee 1080$

**Exercice38 :** si  $2 = a \wedge b$  et  $-12 = a \times b$

déterminer :  $a \vee b$

**Exercice 39:**  $n$  et  $a$  et  $b$  des entiers naturels  
Démontrer que si  $q$  est le quotient de la division euclidienne de  $n$  par  $a$  et  $q'$  est le quotient de  $q$

par  $b$  Alors  $q'$  est aussi le quotient de  $n$  par  $ab$

**Exercice 40:** Déterminer le reste de la division

euclidienne de  $19^{52} \times 23^{41}$  par 7

**Exercice41 :** 1)montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(n+1)^{2019} - 1 \equiv 0[n]$$

2) montrer que:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 4^{2n+2} \equiv 1[15]$

**Exercice42:**  $n \in \mathbb{N}$  on pose  $U_n = 4^n - 3n - 1$

1)montrer que  $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = 4U_n + 9n$

2) En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 9$  divise  $4^n - 3n - 1$

**Exercice43 :** Résoudre dans  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  l'équation:

$$x^2 - x - 2 = \bar{0}$$

**Exercice 44:**  $a \in \mathbb{Z}$  et  $b \in \mathbb{Z}$  et  $c \in \mathbb{Z}$  et  $d \in \mathbb{Z}$   
tels que :  $a = bc + d$

1) montrer que  $a \wedge b = b \wedge d$

2) En déduire que :  $a \wedge b = b \wedge (a - bc)$

**Exercice45 :**  $a \in \mathbb{N}$  On considère les deux

nombres :  $A = 35a + 57$  et  $B = 45a + 76$

montrer que  $A \wedge B = 1$  ou  $A \wedge B = 19$

**Exercice46 :**  $x \in \mathbb{N}^*$  et  $y \in \mathbb{N}^*$  On considère les

deux nombres :  $a = 9x + 4y$  et  $b = 2x + y$

1)montrer que  $x \wedge y = a \wedge b$

2)  $n \in \mathbb{N}$  on pose :  $a = n^2 + 5n + 13$  et  $b = n + 3$

a)montrer que  $a \wedge b = b \wedge 7$

b)en déduire les valeurs possibles  $a \wedge b = d$

c)montrer que :  $n \equiv 4[7] \Leftrightarrow a \wedge b = 7$

d)en déduire les valeurs de  $n \in \mathbb{N}$  tel que :

$$a \wedge b = 1$$

**Exercice 47:**  $n \in \mathbb{Z}$  on pose :  $d_n = (2n+8) \wedge (3n+15)$

1) montrer que  $d_n \in \mathbb{Z}/6$

2)déterminer les les entiers relatifs  $n$

tel que  $d_n = 6$

**Exercice 48:**  $a \in \mathbb{N}^*$  et  $b \in \mathbb{N}^*$  et  $a \geq 3$

et  $a$  est impair et on pose :  $d = (2^a - 1) \wedge (2^b + 1)$

1) a)montrer que  $2^{ab} \equiv 1[d]$

b)montrer que  $2^{ab} \equiv -1[d]$

2) En déduire que :  $d \in \{1; 2\}$

3)montrer que  $d = 1$

**Exercice49 :** montrer que :  $2^{4^{n+1}} + 5 \equiv 0[21] \quad \forall n \in \mathbb{N}$

**Exercice 50 :** déterminer le nombre entier naturel

$n$  Tel que le quotient de la division euclidienne

de  $n$  par 25 est  $p$  et le reste est  $p^2$  ( $p \in \mathbb{N}$ )

**Exercice51:**  $b \in \mathbb{N}^*$  et  $a \in \mathbb{Z}$

si  $q$  est le quotient de la division euclidienne de

$a - 1$  par  $b$  déterminer le quotient de la division

euclidienne de  $ab^9 - 1$  par  $b^{10}$

**Exercice52 :** 1)montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$(n+2)^{n+2} - 2^{n+2} (n+1) \equiv 0[n^2]$$

2) montrer que:  $7^{7^{7^{7^7}}} \equiv 3[10]$

**Exercice53 :**

1)a)en déduire que :  $2^{4k+r} \equiv 2^r [5] \quad \forall (k; r) \in \mathbb{N}^2$

b) Déterminer et discuter suivant les valeurs de l'entier naturel  $n$  le reste de la division par 5 du nombre  $2^n$

2) montrer que  $\frac{5}{17^{4p+2} + 32^{4p+3} + 3} \forall p \in \mathbb{N}^*$

3) montrer que  $\frac{5}{1^{2006} + 2^{2006} + 3^{2006} + 4^{2006}}$

**Exercice54** : déterminer le chiffre des unités des nombres suivants : 1)  $2019^{2020^{2021}}$  2)  $1987^{1991^{1983}}$

**Exercice55** : soit  $N = \overline{dcba}$  un entier naturel montrer que :  $N \equiv a - b + c - d [11]$

**Exercice56** :

1) En utilisant l'algorithme d'Euclide calculer :  $67 \wedge 39$

2) en déduire deux nombres relatifs  $u$  et  $v$  tel que :  $39u + 67v = 1$

**Exercices pour le 2bac SM**

**Exercice57** : montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(3n+1) \wedge (7n+2) = 1$$

**Exercice58** : montrer que l'ensemble des solutions du système suivant est non vide :

$$\begin{cases} n \equiv 2 [11] \\ n \equiv 3 [7] \end{cases}$$

**Exercice59** : résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation suivante : (E)  $7(x-2) = 3(y+1)$

**Exercice60** : déterminer l'entier naturel  $n$  tel

que :  $\frac{n(n^2+3n-2)}{n+1} \in \mathbb{N}$

**Exercice61** : déterminer dans  $\mathbb{N}^2$  les couples

$$(x; y) / \begin{cases} x + y = 48 \\ x \wedge y = 4 \end{cases} \text{ avec } x \leq y$$

**Exercice62**: résoudre dans  $\mathbb{Z}$  le système

suisant:  $\begin{cases} 2x \equiv 3 [7] \\ 3x \equiv 1 [5] \end{cases}$

**Exercice63**: 1) Montrer que :  $\forall a \in \mathbb{Z}^*$  et  $\forall b \in \mathbb{Z}^*$

$$\text{on a : } a \wedge b = 1 \Rightarrow \begin{cases} a \wedge (a+b) = 1 \\ b \wedge (a+b) = 1 \\ a \wedge b(a+b) = 1 \\ (a+b) \wedge ab = 1 \end{cases}$$

**Exercice64** : Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(2n+5) \wedge (n^2+5n+6) = 1$$

**Exercice65** : en utilisant Fermat Montrer que :

1)  $3^{13} + 5^{35} + 7^{57} \equiv 1 [11]$

2)  $2^{16n+1} + 7^{32n+2} \equiv 0 [17]$

**Exercice66** : écrire dans le système de numération a base 3 le nombre 73

**Exercice67** : déterminer les entiers naturels  $x$  et  $y$  tel que :  $\overline{x0y}_{(5)} = \overline{y0x}_{(7)}$

**Exercice68 :1)** résoudre dans  $\mathbb{Z} / 7\mathbb{Z}$

$$\overline{2x^3 + x + 3} = \overline{0}$$

2) déterminer les entiers naturels  $n$  tels que : 7 divise  $\overline{2013}_{(n)}$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »  
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs  
et exercices

Que l'on devient un mathématicien

