

# L'ARITHMETIQUE

## A) Divisibilité dans $\mathbb{Z}$ .

1)  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs tels que  $b \neq 0$

On dit que l'entier relatif  $b$  divise  $a$  s'il existe un entier relatif  $k$  tel que  $a = kb$

On écrit :  $b|a$ . et on dit que  $a$  est divisible par  $b$  ou  $a$  est un multiple de  $b$

**b)** Si  $b|m$  et  $b|n$  on dit que  $b$  est un diviseur commun de  $m$  et  $n$

**c)** Si  $b|m$  et  $b'|m$ , on dit que  $m$  est un multiple commun de  $b$  et  $b'$

## B) Propriétés de Divisibilité dans $\mathbb{Z}$ .

$a \in \mathbb{Z}$  ;  $b \in \mathbb{Z}$  ;  $c \in \mathbb{Z}$

- 1)  $1|a$  et  $-1|a$  et  $a|a$  et  $a|-a$
- 2)  $b|a \Rightarrow |b| \leq |a|$
- 3)  $a/b \Rightarrow a/b \times c$
- 4)  $a/b \Rightarrow |a| \leq |b|$
- 5)  $b|1 \Rightarrow b \in \{-1, 1\}$
- 6)  $a|b$  et  $b|a \Rightarrow |a| = |b|$
- 7)  $a|b$  et  $c|d \Rightarrow ac|bd$
- 8)  $a|b$  et  $b|c \Rightarrow a|c$
- 9)  $a|b \Rightarrow a|bc$
- 10)  $a|b$  et  $b|c \Rightarrow a|c$
- 11)  $a|b \Rightarrow a|bc$
- 12)  $a|m$  et  $a|n \Rightarrow a|m+n$
- 13)  $a|m$  et  $a|n \Rightarrow a|m-n$
- 14)  $a|m$  et  $a|n \Rightarrow a|\alpha m + \beta n$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des entiers relatifs quelconques.
- 15)  $a/b \Rightarrow a^n/b^n$   $n \in \mathbb{N}$

## C) La division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

$a$  et  $b$  deux entiers relatifs tels que  $b \neq 0$  ; ils existent un entier relatif  $q$  et un entier naturel  $r$  tels que :  $a = bq + r$  où  $0 \leq r < |b|$

- L'entier  $a$  s'appelle : **Le divisé**
- L'entier  $b$  s'appelle : **Le diviseur**
- L'entier  $q$  s'appelle : **Le quotient**
- L'entier  $r$  s'appelle : **Le reste**

**Remarque :** Si  $r$  est le reste de la division euclidienne par  $b$  alors :  $r \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ .

## D) Les nombres premiers

- a) On dit que l'entier  $d$  est un diviseur **effectif** de l'entier relatif  $a$  si  $d|a$  et  $|d| \neq 1$  et  $|d| \neq |a|$
- b) On dit qu'un entier relatif non nul  $p$  est **premier** s'il est différent de 1 et s'il n'admet pas de diviseurs effectifs.
  - Un nombre premier  $p$  admet exactement deux diviseurs positifs 1 et  $|p|$ .
  - Pour l'étude des nombres premiers on se contente d'étudier les nombres premiers positifs.
- c) si  $a$  un entier naturel non nul différent de 1 et non premier, le plus petit diviseur de  $a$  différent de 1 est un nombre premier
- d) Soit  $n$  un entier naturel non nul, différent de 1 et non premier, il existe un nombre premier  $p$  qui divise l'entier  $n$  et qui vérifie  $p^2 \leq n$ .
- e) Si un entier  $n$  n'est divisible par aucun entier premier  $p$  et qui vérifie  $p^2 \leq n$  alors  $n$  est premier.

**Remarque :** Cette propriété nous permet de déterminer si un nombre est premier ou non

**Théorème :** L'ensemble des nombres premiers est infini.

## E) Plus grand diviseurs commun

1) On dit que le nombre  $d$  est le plus grand diviseur commun de deux entiers relatifs  $a$  et  $b$  lorsque  $d$  divise  $a$  et  $d$  divise  $b$  et qu'il n'y a pas d'autre plus grands diviseurs de ces deux nombres. on note  $d = PGDC(a, b) = a \wedge b$

- Propriétés :**
- 1)  $a \wedge a = |a|$
  - 2)  $1 \wedge a = 1$
  - 3)  $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$
  - 4) Si  $b|a$  alors  $a \wedge b = |b|$
  - 5) si  $d|a$  et  $d|b$  alors  $d|(a \wedge b)$
  - 6)  $a \wedge b = a \wedge (a - b)$
  - 7)  $a \wedge b = |a| \wedge |b|$

**Définition :** On dit que deux entiers relatifs  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux si  $a \wedge b = 1$ .

## F) L'algorithme d'Euclide.

- 1) Soit  $a$  un entier naturel et  $b$  un entier naturel non nul on a :  $a = bq + r$  où  $0 \leq r < b$  alors on a :  $a \wedge b = b \wedge r$
- 2) Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls. Le plus grand diviseur commun de  $a$  et  $b$  est le dernier reste non nul dans les divisions euclidiennes successives.
- 3) Soient  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs non nuls. Les diviseurs communs de  $a$  et  $b$  sont les diviseurs de  $a \wedge b$ .  
On peut dire que :  $D_a \cap D_b = D_{a \wedge b}$

## G) Le plus petit multiple commun.

On dit que le nombre entier naturel  $m$  est le plus petit multiple commun de deux entiers relatifs  $a$  et  $b$  lorsque  $m$  est un multiple de  $a$  et de  $b$  et qu'il n'y a pas d'autre plus petit multiple non nuls de ces deux nombres. On note :  $m = PPCM(a, b) = a \vee b$

- Propriétés :**
- 1)  $a \vee a = |a|$
  - 2)  $a \vee b = b \vee a$
  - 3)  $a \vee 1 = |a|$
  - 4) Si  $b|a$  alors  $a \vee b = |a|$
  - 5)  $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$
  - 6)  $a \vee b = |a| \vee |b|$
  - 7)  $a|(a \vee b)$  ;  $b|(a \vee b)$  et  $(a \vee b)|ab$

8) Si  $a \vee b = m$  et  $M$  un multiple commun de  $a$  et  $b$  alors  $m|M$ .

- 9)  $(a \wedge b) \times (a \vee b) = |ab|$
- 10)  $ca \vee cb = c(a \vee b)$
- 11)  $ca \wedge cb = c(a \wedge b)$

12) Soient  $a$  et  $b$  et des entiers relatifs non nuls :

$$a \wedge b = d \Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2; \begin{cases} a = \alpha d \\ b = \beta d \\ \alpha \vee \beta = 1 \end{cases}$$

## H) LA CONGRUENCE MODULO $n$

$a$  et  $b$  deux entiers relatifs ; et  $n$  un entier naturel non nul. On dit que :  $a$  est congrue à  $b$  modulo  $n$  si  $n|(b - a)$ .

On écrit :  $a \equiv b [n]$

1) Si  $a \equiv b [n]$  alors  $a$  et  $b$  ont le même reste dans la division euclidienne par  $n$

2) a)  $(\forall a \in \mathbb{Z}) (a \equiv a [n])$  on dit que la relation de congruence est réflexive.

b)  $(\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2) (a \equiv b [n] \Leftrightarrow b \equiv a [n])$  : on dit que la relation de congruence est symétrique.

c)  $(\forall (a, b, c) \in \mathbb{Z}^3)$

$(a \equiv b [n] \text{ et } b \equiv c [n]) \Rightarrow a \equiv c [n]$  : on dit que la relation de congruence est transitive.

On dit que la relation de congruence est une relation d'équivalence

3) Soit  $n$  un entier naturel non nul.

Si  $a \equiv b [n]$  et  $c \equiv d [n]$  alors :

a)  $a + c \equiv b + d [n]$  On dit que la relation de congruence est compatible avec l'addition dans  $\mathbb{Z}$

b)  $ac \equiv bd [n]$  ; On dit que la relation de congruence est compatible avec la multiplication dans  $\mathbb{Z}$

4) Si  $a \equiv b [n]$  alors pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}$  on a :  $a^k \equiv b^k [n]$

### 1) Les classes d'équivalences.

Soit  $n$  un entier naturel non nul. L'ensemble des entiers relatifs qui ont le même reste  $r$  dans la division euclidienne par  $n$  s'appelle la classe d'équivalence de  $r$  et se note :

$$\bar{r} = \{m \in \mathbb{Z} / m \equiv r [n]\} = \{nk + r \text{ où } k \in \mathbb{Z}\}$$

$\mathbb{Z} / n\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \dots; \bar{n-1}\}$  S'appelle ensemble quotient

1) On définit dans  $\mathbb{Z} / n\mathbb{Z}$  les deux lois :

a) L'addition : On pose  $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$

b) La multiplication : On pose :  $\bar{a} \times \bar{b} = \overline{a \times b}$

3) Si  $p$  est premier alors

dans  $\mathbb{Z} / p\mathbb{Z}$  on a :  $(\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{a} = 0 \text{ ou } \bar{b} = 0)$

### J) DECOMPOSITION D'UN ENTIER EN FACTEURS DES NOMBRES PREMIERS

1) Chaque entier relatif  $m$  non nul s'écrit d'une façon unique comme le produit des facteurs premiers comme

suite :  $m = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_n^{\alpha_n} = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\alpha_k}$  où  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$

2) Soit  $a$  un entier relatif dont la décomposition est de la

forme :  $a = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_n^{\alpha_n} = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\alpha_k}$

3) un entier  $d$  non nul divise l'entier  $a$  si et seulement si  $d$  à une décomposition de la forme

$$d = \varepsilon p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times p_3^{\beta_3} \times \dots \times p_n^{\beta_n} = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\beta_k}$$

où  $(\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket) (0 \leq \beta_i \leq \alpha_i)$

$$4) a = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_n^{\alpha_n} = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\alpha_k}$$

est un entier, le nombre des diviseurs de  $a$

est :  $2(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1)$

5) Soit  $a$  un entier relatif dont la décomposition est de la

$$\text{forme : } a = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_n^{\alpha_n} = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\alpha_k}$$

un entier  $m$  est un multiple de  $a$  si et seulement si

$$m = \varepsilon p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times p_3^{\beta_3} \times \dots \times p_n^{\beta_n} = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\beta_k}$$

6) Soient  $a = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\alpha_k} = 1$  et  $b = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\beta_k}$  deux entiers

$$a \wedge b = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\inf(\alpha_k; \beta_k)} \text{ et } a \vee b = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\sup(\alpha_k; \beta_k)}$$

### K) Le P.G.D.C et le P.P.M.C de plusieurs nombres.

1) Soient  $a_1, a_2, \dots, a_n$  des entiers relatifs non nuls, le plus grand entier naturel  $d$  qui divise en même temps tous les nombres  $a_1, a_2, \dots, a_n$  s'appelle le plus grand diviseur commun des nombres  $a_1, a_2, \dots, a_n$  et se

note :  $d = a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$

2) Soient  $a_1, a_2, \dots, a_n$  des entiers relatifs non nuls ; on a :  $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n = (a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_{n-2}) \wedge (a_{n-1} \wedge a_n)$

3) On dit que les entiers relatifs non nuls :  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sont premiers entre eux si :  $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n = 1$

5) Soient  $a_1, a_2, \dots, a_n$  des entiers relatifs non nuls, le plus petit entier naturel  $m$  qui est multiple en même temps tous les nombres  $a_1, a_2, \dots, a_n$  s'appelle le plus petit multiple commun des nombres  $a_1, a_2, \dots, a_n$  et se note :

$$m = a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n$$

### L) CRITERES DE DIVISIBILITE DES NOMBRES

5, 25, 3, 9, 11 ET 4 : Soit  $x$  un entier naturel non nul tel que :

$x \equiv a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_1 10^1 + a_0$  où  $0 \leq a_i \leq 9$  ; on a :

1)  $x \equiv 0 [5] \Leftrightarrow a_0 = 0$  ou  $a_0 = 5$

2)  $x \equiv 0 [25] \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \in \{0, 25, 50, 75\}$

3)  $x \equiv 0 [3] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n a_i \equiv 0 [3]$

4)  $x \equiv 0 [9] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n a_i \equiv 0 [9]$

5)  $x \equiv 0 [11] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n (-1)^i a_i \equiv 0 [11]$

6)  $x \equiv 0 [4] \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \equiv 0 [4]$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

