

**Exercice 1**

Déterminer l'entier naturel  $n$  dans chacun des cas ci-dessous

- a)  $n - 4/6$       b)  $n - 3/n + 3$   
 c)  $n + 1/3n - 4$       d)  $3n + 4/11n + 8$

**Exercice 2**

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers tels que  $a \wedge b = 1$

Montrer que

$$(a + b) \wedge a = 1 \text{ et } (a - b) \wedge b = 1$$

**Exercice 3**

Soit  $n$  un entier. montrer que :

$$(n^2 + n + 1) \wedge (n + 1) = 1$$

$$(7n + 2) \wedge (21n^2 + 16n + 3) = 1$$

$$(4n + 1) \wedge (4n - 1) = 1 \quad , \quad n \wedge (n^2 + 1) = 1$$

$$(7n + 2) \wedge (11n + 3) = 1$$

$$(2n + 3) \wedge (3n + 5) = 1$$

$$(2n^2 + 4n + 1) \wedge (n + 2) = 1$$

**Exercice 4**

1) soit  $a$  un entier relatif tel que  $a \notin \{-1; 0; 1\}$

montrer que  $a^4 + a^2 + 1$  n'est pas premier

2)  $a$  un entier différent de 1.

Montrer que  $a^4 + 4$  n'est pas premier

**Exercice 5**

Résoudre dans  $\mathbb{N}^2$  les systèmes :

$$1) \begin{cases} x \wedge y = 6 \\ xy = 432 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x \wedge y = 12 \\ x + y = 96 \end{cases}$$

**Exercice 6**

1) montrer que  $(n^2 + 1) \wedge (n + 1) = (n + 1) \wedge 2$

2) déterminer  $(n^2 + 1) \wedge (n + 1)$  suivant la

parité du nombre  $n$

3) déterminer  $n$  pour que

$$(n^2 + 1) \wedge (n + 1) = (n + 1)$$

**Exercice 7**

1) déterminer  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{N}^*$  tels que  $a \leq b$

$$\text{et } (a \vee b) - (a \wedge b) = 7$$

2) déterminer  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{N}^*$  sachant que

$$2(a \vee b) - 7(a \wedge b) = 11$$

3) déterminer  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{N}^*$  tels que  $a \leq b$

$$\text{et } (a \vee b) - 3(a \wedge b) = 4$$

**Exercice 8**

1) On pose  $a = pn$  et  $b = (p - 1)n$  :  $p \in \mathbb{N}^*$

et  $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ . montrer que  $a \wedge b = a - b$

2) montrer que si  $a \wedge b = a - b$  alors

Il existe un couple  $(p, n)$  de  $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  tel que :

$$a = pn \text{ et } b = (p - 1)n$$

**Exercice 9**

Soient  $y$  ;  $x$  deux entiers de  $\mathbb{N}^*$ .

On considère les nombres

$$a = 40x(3y + 2) \quad , \quad b = 15x(8y + 5)$$

$$\text{et } c = 24x(5y + 3)$$

1) déterminer  $a \wedge b$  et  $b \wedge c$

2) montrer que  $a \wedge b \wedge c = x$

**Exercice 10**

Soit  $a$  un entier naturel tel que  $a \geq 2$

1) montrer que si  $p|n$  alors  $a^p - 1|a^n - 1$

2) en déduire que  $2^{2010} - 1$  est un multiple des nombres 3 ; 7 ; 31

**Exercice 11**

On considère dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation

$$(E) \quad x^2 - y^2 + x - y = 12$$

a) vérifier que  $x - y$  et  $x + y + 1$  ont des parités différentes

b) résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation (E)

**Exercice 12**

on considère dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation

$$(E) \quad x^2 - y^2 - 6x - 63 = 0$$

a) montrer que :

$$(E) \Leftrightarrow (x - y - 3)(x + y - 3) = 72$$

b) déterminer les solutions de (E)

**Exercice 13**

$p$  ,  $n$  deux entiers de  $\mathbb{Z}$ .

On pose  $x = 5n + 3p$  et  $y = 3n + 2p$

a) montrer que :

$$(d|x \text{ et } d|y) \Rightarrow (d|n \text{ et } d|p)$$

b) montrer que  $x \wedge y = p \wedge n$

**Exercice 14**

montrer que pour tout entier naturel  $n$

le nombre  $5^{2n} + 3$  n'est pas divisible par 8