Exercices corrigés d'arithmétique dans N Partie II

AHMED AGOUZAL

Exercices corrigés d'arithmétique dans N

Exercice 4 :

Soit a un entier naturel impair.

1 – Montrer que $a^2 - 1$ est un multiple de 8.

2 – Déduire que $a^4 - 1$ est un multiple de 16.

3 – Soient m et n deux entiers naturels impairs, montrer que 8 divise $m^2 + n^2 + 6$

Exercice 5 :

1 – Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que : $(n^2 + 1 - n)(n^2 + 1 + n) = n^4 + n^2 + 1$

2 – Montrer que 10101 est divisible par 111

3 – Montrer que $10^8 + 10^4 + 1$ est divisible Par 111.

Exercice 6 :

1 – Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $n^2 + 4n + 9 = (n + 3)(n + 1) + 6$

2 – Déterminer toutes les valeurs de n ($n \in \mathbb{N}$) tel que le nombre $(n + 3)$ divise $n^2 + 4n + 9$

Exercice 7 :

1 – Vérifier que $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

2 – Montrer que 1 000 000 001 n'est pas premier

3 – Montrer que 213 n'est pas premier et que 127 est premier

Solution de l'exercice 4 :

Soit a un entier naturel impair.

1 – Montrer que $a^2 - 1$ est un multiple de 8.

a est impair il existe un entier naturel k tel que : $a = 2k + 1$

$a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ Donc $a^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k^2 + 4k$

Donc $a^2 - 1 = 4k(k+1)$ On a $k(k+1)$ est pair il existe un entier naturel k' tel que : $k(k+1) = 2k'$

Donc $a^2 - 1 = 4 \times 2k'$ Donc $a^2 - 1 = 8k'$ D'où $a^2 - 1$ est un multiple de 8

2 – Déduire que $a^4 - 1$ est un multiple de 16.

$a^4 - 1 = (a^2)^2 - 1 = (a^2 - 1)(a^2 + 1)$ On a $a^2 = 4k^2 + 4k + 1$ donc $a^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 2$

donc $a^2 + 1 = 2(2k^2 + 2k + 1)$ Donc $a^4 - 1 = 8k' \times 2(2k^2 + 2k + 1)$

Donc $a^4 - 1 = 16k'(2k^2 + 2k + 1)$ on pose $k'' = k'(2k^2 + 2k + 1)$ donc $k'' \in \mathbb{N}$

Donc $a^4 - 1 = 16k''$

D'où $a^4 - 1$ est un multiple de 16.

Exercices corrigés d'arithmétique dans N

3 – Soient m et n deux entiers naturels impairs, montrer que 8 divise $m^2 + n^2 + 6$

m et n deux entiers naturels impairs

$m^2 + n^2 + 6 = m^2 + n^2 - 2 + 2 + 6 = m^2 - 1 + n^2 - 1 + 8$

m et n sont impairs donc $m^2 - 1$ et $n^2 - 1$ sont des multiples de 8.

il existe k et k′ deux entiers naturels tels que : $m^2 - 1 = 8k$ et $n^2 - 1 = 8k'$

Donc $m^2 + n^2 + 6 = 8k + 8k' + 8 = 8(k + k' + 1)$

on pose $k'' = k + k' + 1$ donc $k'' \in \mathbb{N}$

Donc $m^2 + n^2 + 6 = 8k''$

D'où 8 divise $m^2 + n^2 + 6$

Exercices corrigés d'arithmétique dans N

Solution de l’exercice 5 :

1 – Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que : $(n^2 + 1 - n)(n^2 + 1 + n) = n^4 + n^2 + 1$

$$(n^2 + 1 - n)(n^2 + 1 + n) = [(n^2 + 1)^2 - n^2] = n^4 + 2n^2 + 1 - n^2$$

D’où $(n^2 + 1 - n)(n^2 + 1 + n) = n^4 + n^2 + 1$

2 – Montrer que 10101 est divisible par 111

On a $10101 = 111 \times 91$ D’où 10101 est divisible par 111

3 – Montrer que $10^8 + 10^4 + 1$ est divisible Par 111.

On a $10^8 + 10^4 + 1 = (10^2)^4 + (10^2)^2 + 1$ Or $(n^2 + 1 - n)(n^2 + 1 + n) = n^4 + n^2 + 1$

On prend $n = 10^2$ Donc $[(10^2)^2 + 1 - 10^2][(10^2)^2 + 1 + 10^2] = (10^2)^4 + (10^2)^2 + 1$

On a $10^8 + 10^4 + 1 = ((10^2)^2 + 1 - 10^2)((10^2)^2 + 1 + 10^2)$

Or $10^4 + 1 + 10^2 = 10101$ et $10101 = 111 \times 91$

Donc $10^8 + 10^4 + 1 = 111 \times 91(10^4 + 1 - 10^2)$

on pose $k = 91(10^4 + 1 - 10^2)$ donc $k \in \mathbb{N}$ Donc $10^8 + 10^4 + 1 = 111k$

D’où $10^8 + 10^4 + 1$ est divisible par 111

Solution de l'exercice 6 :

1 – Vérifier que pour tout $n \in N$: $n^2 + 4n + 9 = (n + 3)(n + 1) + 6$

On a $(n + 3)(n + 1) + 6 = n^2 + n + 3n + 3 + 6 = n^2 + 4n + 9$

D'où $n^2 + 4n + 9 = (n + 3)(n + 1) + 6$

2 – Déterminer toutes les valeurs de n $(n \in N)$ tel que le nombre $(n + 3)$ divise $n^2 + 4n + 9$

$(n + 3)$ divise $n^2 + 4n + 9$ c'est –à–dire $\frac{n^2+4n+9}{n+3} \in \mathbb{N}$

Donc $\frac{n^2+4n+9}{n+3} = \frac{(n+3)(n+1)+6}{n+3} = \frac{(n+3)(n+1)}{n+3} + \frac{6}{n+3}$

Donc $\frac{n^2+4n+9}{n+3} = (n+1) + \frac{6}{n+3}$

Pour que $(n + 3)$ divise $n^2 + 4n + 9$ il faut que $(n + 3)$ divise 6

Les diviseurs de 6 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 6.

Donc $n + 3 = 1$ ou $n + 3 = 2$ ou $n + 3 = 3$ ou $n + 3 = 6$ Donc $n = -2$ ou $n = -1$ ou $n = 0$ ou $n = 3$

Or $-2 \notin N$ et $-1 \notin N$ d'où $n = 0$ ou $n = 3$

Solution de l’exercice 7 :

1 – Vérifier que $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3$$

D’où $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

2 – Montrer que 1 000 000 001 n’est pas premier

On a $1\ 000\ 000\ 001 = 1\ 000\ 000\ 000 + 1$

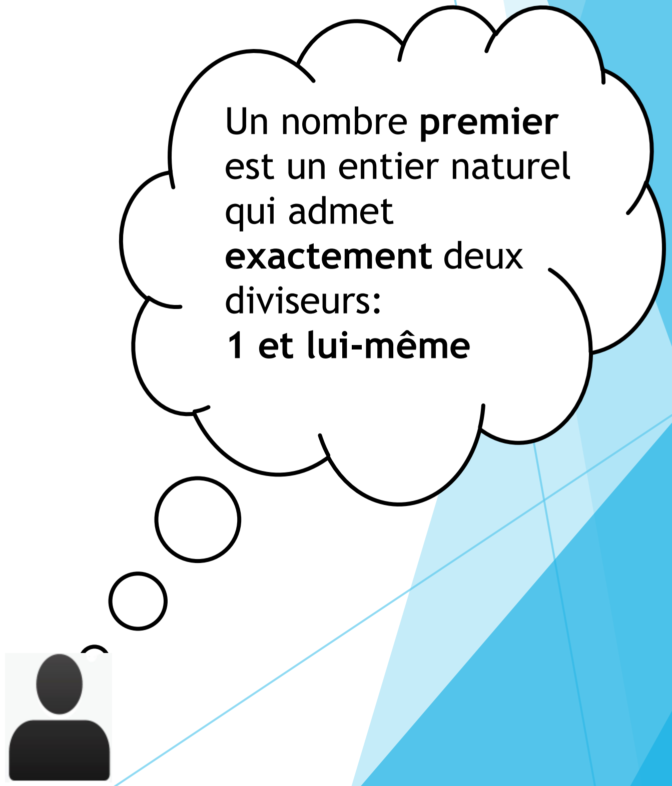
Donc $1\ 000\ 000\ 001 = 10^9 + 1$

Donc $1\ 000\ 000\ 001 = (10^3)^3 + 1^3$

On a $(10^3)^3 + 1^3 = (10^3 + 1)((10^3)^2 - 10^3 + 1)$

On a $10^3 + 1 = 1001$ donc (1001) divise $1\ 000\ 000\ 001$

D’où 1 000 000 001 n’est pas premier



Exercices corrigés d'arithmétique dans N

3 – Montrer que 291 n’est pas premier et que 127 est premier

Montrer que 291 n’est pas un nombre premier

- ♦ On calcule $\sqrt{291} \approx 17;0587$
- ♦ On teste la divisibilité de 291 par 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17
- ♦ Or 291 impair donc n’est pas divisible par 2
- ♦ On a 2 + 9 + 1 = 12 donc 291 est divisible par 3

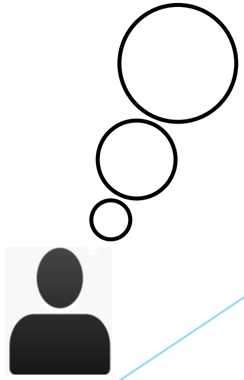
D’où 291 n’est pas un nombre premier.

Montrer que 127 est un nombre premier

- ♦ On calcule $\sqrt{127} \approx 11;26$
- ♦ On teste la divisibilité de 127 par 2; 3; 5; 7; 11.
- ♦ 127 n’est pas divisible par 2; 3; 5; 7; 11

D’où 127 est un nombre premier.

Pour montrer qu’un nombre entier naturel N ≥ 2 est un nombre premier, il suffit de montrer que N n’est divisible par aucun nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{N}$



Exercices corrigés d'arithmétique dans N

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47
53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173	179	181	191	193	197
199	211	223	227	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349	353	359	367	373	379
383	389	397	401	409	419	421	431	433	439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503	509	521	523	541	547	557	563	569	571
577	587	593	599	601	607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733	739	743	751	757	761
769	773	787	797	809	811	821	823	827	829	839	853	857	859	863
877	881	883	887	907	911	919	929	937	941	947	953	967	971	977
983	991	997	1009	1013	1019	1021	1031	1033	1039	1049	1051	1061	1063	1069
1087	1091	1093	1097	1103	1109	1117	1123	1129	1151	1153	1163	1171	1181	1187
1193	1201	1213	1217	1223	1229	1231	1237	1249	1259	1277	1279	1283	1289	1291
1297	1301	1303	1307	1319	1321	1327	1361	1367	1373	1381	1399	1409	1423	1427
1429	1433	1439	1447	1451	1453	1459	1471	1481	1483	1487	1489	1493	1499	1511
1523	1531	1543	1549	1553	1559	1567	1571	1579	1583	1597	1601	1607	1609	1613
1619	1621	1627	1637	1657	1663	1667	1669	1693	1697	1699	1709	1721	1723	1733
1741	1747	1753	1759	1777	1783	1787	1789	1801	1811	1823	1831	1847	1861	1867
1871	1873	1877	1879	1889	1901	1907	1913	1931	1933	1949	1951	1973	1979	1987
1993	1997	1999												

Nombre premier inférieur 2000