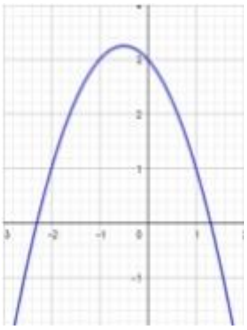
THEOREME DE ROLLE ; THEOREME DES ACCROISSEMENTS FINIS (T.A.F)

1) Activités

Activité 1 : La courbe ci-dessous est la courbe de la fonctions : $f(x) = -x^2 - x + 3$

1- Vérifier que $f(-2) = f(1)$.



2- Trouver le réel c dans $]-2,1[$ tel que $f'(c) = 0$

3- Interpréter géométriquement résultat.

Remarques : 1) $f(-2) = f(1).=1$

2)f est continue sur $[-2;1]$ et dérivable sur $]-2;1[$

3) $f'(x) = -2x - 1$

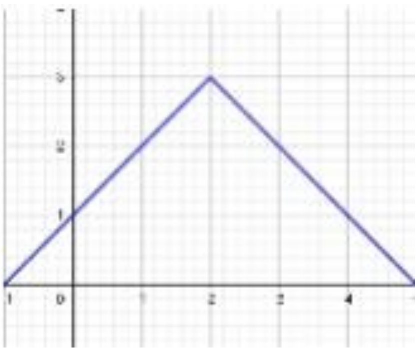
$$f'(c) = 0 \Leftrightarrow -2c - 1 = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{1}{2} \in]-2;1[$$

Donc il existe $c = -\frac{1}{2} \in]-2;1[$ tel que : $f'(c) = 0$

4)l'existence de c vient du fait que la fonction admet un minimum en ce point et de la dérivabilité de f en ce point……..

Activité 2 :Dans la courbe ci-dessous on a $f(0) = f(4)$

Quelle est la valeur logique de l'assertion : $(\exists c \in]0,4[)(f'(c) = 0)$?



Remarque : fausse (la dérivabilité de f en 2 ??)

2)Théorème de Rolle

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que : $f(a) = f(b)$. Alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que : $f'(c) = 0$.

Preuve :

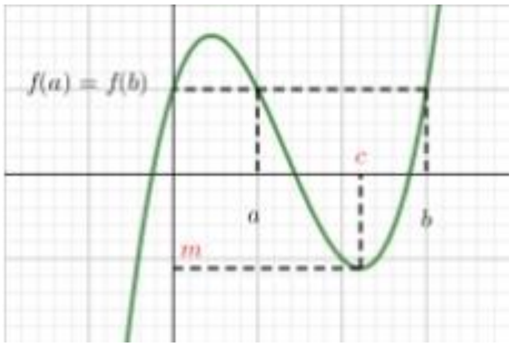
Puisque f est continue alors ils existent m et M dans $\mathbb{R}$ tels que :$f([a, b]) = [m, M]$, où

$m = \min f(x)$ et $M = \max f(x)$ $x \in [a,b]$

1) Si $m = M$ alors f est constante sur $[a, b]$ d'où $(\forall x \in]a, b[)(f'(x) = 0)$

2) Si $m \neq M$ (alors $m < M$) on a alors $f(a) > m$ ou $f(a) < M$.

a) Si $m < f(a)$ alors : il existe c dans$]a, b[$ tel que : $f(c) = m$



$(\forall x \in]a, c[)$ $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{f(x) - m}{x - c} \leq 0$

Donc : $\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'_g(c) \leq 0$

D'autre part :$(\forall x \in]c, b[)$ $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{f(x) - m}{x - c} \geq 0$

Donc : $\lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'_d(c) \geq 0$

et puisque f est dérivable en c alors :

$f'_g(c) = f'_d(c) = 0$

b) Si $f(a) < M$ même démonstration.

Remarque :

1) Il n'y a pas unicité du point c tel que $f'(c) = 0$.

2) Le théorème n'est plus vrai si f n'est pas dérivable sur] a, b [tout entier

Exemple : la fonction f définie par :

$f(x) = |x|$ sur $[-1, 1]$

2) Le théorème n'est plus vrai si f n'est pas continue sur $[a, b]$, tout entier

3) Applications du théorème de Rolle

Exercice 1 : Soit f la fonction définie par :

$f(x)=3x^4-11x^3+12x^2-4x+2$ Montrer que f' s'annule au moins une fois sur]0, 1[

Solution : on a : $f(0) = f(1)=2$

Donc f une fonction continue sur [0, 1], dérivable sur]0, 1[et telle que : $f(0) = f(1)$. D'après le théorème de Rolle il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que : $f'(c) = 0$ donc : f' s'annule au moins une fois sur]0, 1[

Exercice 2 : Soit $f : R \to R$ la fonction définie par :

$f(x)=\dfrac{\sin x+\cos x}{1+\cos^2 x}$,

Montrer que, pour tout $a \in R$, la fonctions f' s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]a, a+2\pi[$.

Solution : on a : $f(a) = f(a+2\pi)$

Donc f une fonction continue sur $[a, a+2\pi]$, dérivable sur $]a, a+2\pi[$ et telle que :

$f(a) = f(a+2\pi)$D'après le théorème de Rolle il existe un réel $c \in]a, a+2\pi[$ tel que : $f'(c) = 0$

donc : f' s'annule au moins une fois sur

$]a, a+2\pi[$

Exercice 3 : Soit f une fonction définie par :

$f(x)=\dfrac{1-\cos(2\pi x)}{x}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$

Montrer :($\exists c \in$]-1,1[) ($f'(c)=0$

Solution : la fonction f continue sur $[-1;1]-\{0\}$ et dérivable sur $[-1;1]-\{0\}$:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2\pi x)}{(2\pi x)^2}4\pi^2 x=0=f(0)$$

Donc : f est continue en 0

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2\pi x)}{(2\pi x)^2}4\pi^2=2\pi^2\in\mathbb{R}$$

Donc : f est dérivable en 0

Donc : fonction f continue sur $[-1;1]$ et dérivable sur $[-1;1]$

Et on a : $f(-1) = f(1)$

D'après le théorème de Rolle il existe un réel $c \in]-1, 1[$ tel que : $f'(c) = 0$

$$\frac{f'(c)}{c}=\frac{4}{(c^2+1)^2}$$

Exercice 4 : Détermination d'une limite.

Considérons les deux fonctions :

$u(t) = Arctan(t) - t$ et $v(t) = t^2$ et soit $x \in \mathbb{R}^*$

1) Montrer qu'il existe c compris entre 0 et x tel que : $\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{u'(c)}{v'(c)}$

2) En déduire la limite : $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{ar\tan x-x}{x^2}$

Solution : 1)

$$\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{u'(c)}{v'(c)}\Leftrightarrow u(x)v'(c)-v(x)u'(c)=0$$

On Considérer la fonction : g tel que :

$g(t)=u(x)v(t)-v(x)u(t)$ sur $[a, b]$

où $a = \inf(x, 0)$ et $b = \sup(x, 0)$

on a : $g(0)=g(x)=0$ et g continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$

Alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que : $g'(c) = 0$.

On a : $g'(t)=u(x)v'(t)-v(x)u'(t)$

Donc : il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que :

$$u(x)v'(c)-v(x)u'(c)=0\Leftrightarrow\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{u'(c)}{v'(c)}$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{ar\tan x-x}{x^2}=\lim_{c\to 0}\frac{\frac{1}{1+c^2}-1}{2c}=\lim_{c\to 0}\frac{\frac{1-1-c^2}{1+c^2}}{2c}$$

Car ; si $x\to 0$ alors $c\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x - x}{x^2}=\lim_{c\to 0}\frac{\frac{1}{1+c^2}-1}{2c}=\lim_{c\to 0}\frac{-c}{2(1+c^2)}=0$$

4) Théorème des accroissements finiesT.A.F :

Théorème : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$
Alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

Preuve : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$
Considérons une fonction g tel que :

$$g(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Et puisque : g est une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur] a, b[(somme de fonctions dérivables et continues) et on a : g(a) = g(b)=0
D'après le théorème de Rolle il existe un réel $c \in]a, b[$tel que : $g'(c)=0$

On a : $g'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Donc : $g'(c)=0 \Leftrightarrow f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$

Donc on a : $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

5)Inégalité des accroissements finies I.A.F :

Théorème1 : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$
S'ils existent deux réels M et m tels que :

$$m\le f'(x)\le M \quad \forall x\in]a;b[$$

Alors : $m(b-a)\le f(b)-f(a)\le M(b-a)$

Preuve : On a : f est fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$
donc d'après le T. A.F il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et puisque $m\le f'(x)\le M$

$\forall x\in]a;b[$ alors : $m\le f'(c)\le M$

donc : $m\le \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\le M$

donc : $m(b-a)\le f(b)-f(a)\le M(b-a)$

Théorème2 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f est dérivable sur I
et $(\forall x \in I)(|f'(x)| \le k$ (où $k \in \mathbb{R}_+^*$)
Alors :$(\forall (x, y) \in I^2)(|f(x) - f(y)| \le k|x - y|)$

Preuve : Soient x et y deux éléments de I
Si $x \neq y$ On a f est continue sur l'intervalle fermé de borne x et y et dérivable sur l'ouvert de borne x et y.donc, et d'après le T. A.F
il existe c compris entre x et y tel que :
$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$ et puisque $c \in I$
Alors :$|f'(c)| \le k$
donc :$|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y| \le k|x - y|$
Si $x = y$ l'inégalité est vraie.
D'où la preuve du théorème.

Exemple1 : En utilisant le I.A.F
Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})(|\sin x| \le |x|$

Solution :
Considérons une fonction f tel que :

$f(x)=\sin x$ on a :f est dérivable sur $\mathbb{R}$

Et $f'(x)=\cos x$ et $|f'(x)|=|\cos x|\le 1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Par application de I.A.F sur l'intervalle de borne 0 et x ($[a, b]$ où $a = \inf(x, 0)$ et $b = \sup(x, 0)$)

$$|f(b)-f(a)|\le 1|(b-a)|$$

Donc : $|\sin x-\sin 0|\le 1|(x-0)|$

Donc : $|\sin x|\le |x| \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Exemple2 : En utilisant le I.A.F
Montrer que $\forall a\in\mathbb{R}$ et $\forall b\in\mathbb{R}$ et $0\le a\le b$

$$\frac{b-a}{1+b^2}\le \arctan b-\arctan a\le \frac{b-a}{1+a^2}$$

Solution : Considérons une fonction f tel que :

$f(x)=\arctan x$ on a :f est dérivable sur $\mathbb{R}$

Et $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

donc : $\dfrac{1}{1+b^2}\le f'(x)\le \dfrac{1}{1+a^2} \quad \forall x\in[a;b]$

Par application de T.A.F sur l'intervalle $[a;b]$

On a : $\dfrac{1}{1+b^2}(b-a)\le f(b)-f(a)\le \dfrac{1}{1+a^2}(b-a)$

Donc : $\frac{b-a}{1+b^2} \leq ar\tan b - ar\tan a \leq \frac{b-a}{1+a^2}$

Exercice 1 : Soit f la fonction définie par :

$f(x)=x(x+1)(x+2)(x+3)$ Montrer que

l'équation $f'(x)=0$ admet trois solutions sur $\mathbb{R}$

Solution : f une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $f(0) = f(-1) = f(-2) = f(-3)$
D'après le théorème de Rolle on a :

$\exists\alpha \in]-3;-2[\ / \ f'(\alpha)=0$

$\exists\beta \in]-2;-1[\ / \ f'(\beta)=0$

$\exists\delta \in]-1;0[\ / \ f'(\delta)=0$

Et puisque : α ; β et δ sont différents deux a deux

Donc : l'équation $f'(x)=0$ admet trois solutions sur $\mathbb{R}$ car $f'(x)$ est de degré 3

Exercice 2 : Considérons une fonction f continue sur [0,1] et dérivable sur]0,1[telle que :
$f(0) - f(1) = -1$.
Montrer en utilisant le théorème de Rolle

$(\exists c \in]0,1[) \ (\frac{f'(c)}{c}=\frac{4}{(c^2+1)^2}$

Solution : $\frac{f'(c)}{c}=\frac{4}{(c^2+1)^2} \Rightarrow f'(c)-\frac{4c}{(c^2+1)^2}=0$

Considérons une fonction g tel que :

$G(0)=G(1)$

Soit G la fonction primitive de g

donc : $G(x)=f(x)+\frac{2}{x^2+1}$

$G(0)-G(1)=f(0)+2-f(1)-1=f(0)-f(1)+1=0$

Donc ; $G(0)=G(1)$

Et puisque : G est une fonction continue sur [0, 1], dérivable sur]0, 1[(somme et quotient de fonctions dérivables et continues)
D'après le théorème de Rolle il existe un réel $c \in]0, 1[$ tel que : $G'(c)=0$

Et on a : : $G'(x)=f'(x)-\frac{4x}{(x^2+1)^2}$

$$G'(c)=f'(c)-\frac{4c}{(c^2+1)^2}=0 \Leftrightarrow f'(c)=\frac{4c}{(c^2+1)^2}$$

il existe un réel $c \in]0, 1[$ tel que :

Exercice 3 : En utilisant le Théorème des accroissements finies(T.A.F) donner un encadrement du nombre $\sqrt{10001}$ et en déduire une valeur approchée de $\sqrt{10001}$ avec la précision 5×10^{-5}.

Solution : Considérons une fonction f tel que : $f(x)=\sqrt{x}$ on a : On a : f est fonction continue sur [10000, 10001] et dérivable sur
] 10000, 10001 [donc d'après le T. A.F il existe $c \in]$ 10000, 10001 [tel que : $\sqrt{10001}-100=\frac{1}{2\sqrt{c}}$

Donc : $\sqrt{10001}=\frac{1}{2\sqrt{c}}+100$

$c \in]$ 10000, 10001 [donc $10000 \prec c \prec 10001$

Donc : $\sqrt{10000} \prec \sqrt{c} \prec \sqrt{10001}$ donc

$\frac{1}{2\sqrt{10001}} \prec \frac{1}{2\sqrt{c}} \prec \frac{1}{2\sqrt{10000}}$ donc

$\frac{1}{2\sqrt{10001}} \prec \frac{1}{2\sqrt{c}} \prec \frac{1}{200}$ et on a : $\sqrt{10001} \prec 101$

Donc : $\frac{1}{202} \prec \frac{1}{2\sqrt{c}} \prec \frac{1}{200}$ donc

$\frac{1}{202}+100 \prec \frac{1}{2\sqrt{c}}+100 \prec \frac{1}{200}+100$ donc :

$100,00495 \prec \sqrt{10001} \prec 100,005$

Donc : $0 \prec \sqrt{10001}-100,00495 \prec 0,00005$

Donc : $\left|\sqrt{10001}-100,00495\right| \prec 5\times10^{-5}$ donc $100,00495$

Est une valeur approchée de $\sqrt{10001}$ avec la précision 5×10^{-5}.

Exercice 4 : soit la suite $(u_n)_{n\geq1}$ définie par :

$$u_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$$

1)Calculer u_1 ; u_2 et u_3

2)a) monter que $\forall x\in\mathbb{R}_*^+$: $\frac{1}{x+1}\leq \ln(x+1)-\ln x\leq \frac{1}{x}$

b) en déduire que : $u_{n+1}-1\leq \ln(n+1)\leq u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

c)calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Solution :1) $u_1=1 \quad u_2=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \quad u_3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}$

2)a) **:** Considérons une fonction f tel que :

$f(t)=\ln t$ on a : On a : f est fonction continue sur [x, x+1] et dérivable sur
] x, x+1 [$\forall x\in\mathbb{R}_*^+$ donc d'après le T. A.F il existe

c ∈] x, x+1 [tel que : $f(x+1)-f(x)=f'(c)(x+1-x)$

Donc : $\ln(x+1)-\ln x=\frac{1}{c}$ et puisque : $\frac{1}{x+1}\prec\frac{1}{c}\prec\frac{1}{x}$

Car c ∈] x, x+1 [donc : $\frac{1}{x+1}\prec\ln(x+1)-\ln x\prec\frac{1}{x}$

$\forall x\in\mathbb{R}_*^+$

2)b) déduire que : $u_{n+1}-1\leq \ln(n+1)\leq u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$?

On a : $\frac{1}{x+1}\prec\ln(x+1)-\ln x\prec\frac{1}{x} \; \forall x\in\mathbb{R}_*^+$

Donc : $\frac{1}{2}\prec\ln2-\ln1\prec\frac{1}{1}$

$\frac{1}{3}\prec\ln3-\ln2\prec\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}\prec\ln3-\ln2\prec\frac{1}{2}$

………………

$\frac{1}{n+1}\prec\ln(n+1)-\ln n\prec\frac{1}{n}$

La somme de ces inégalités membre a membre donne : $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n+1}\prec\ln(n+1)-\ln1\prec1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$

Donc : $u_{n+1}-1\leq\ln(n+1)\leq u_n$ car $\ln1=0$

2)b) on a : $\mathrm{n}(n+1)\leq u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{n}(n+1)=+\infty$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$

Exercice 5 : Soit f une fonction définie sur l' intervalle $\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=\frac{\pi}{2}-\sin x$ et la suite (u_n) définie par :$u_{n+1}=f(u_n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$ et

$u_0\in\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$

1)montrer que l'équation : $f(x)=x$ admet une solution unique $\alpha\in\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$

2)montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $\frac{\pi}{6}\prec u_n\prec\frac{\pi}{2}$

3)a)montrer que : $\forall x\in\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$ $|f'(x)|\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$

b)en déduire que : $|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{\sqrt{3}}{2}|u_n-\alpha| \; \forall n\in\mathbb{N}$

4) calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

Solution :1) Considérons une fonction g tel que : $g(x)=f(x)-x$ On a : g est une fonction dérivable sur $\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$ et $g'(x)=f'(x)-1=-\cos x-1\prec0$

g est une fonction continue et strictement décroissante sur $\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$ donc une bijection de $\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$

dans : $g\left(\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[\right)=\left]-1;\frac{2\pi-3}{6}\right[$

Puisque : $0\in\left]-1;\frac{2\pi-3}{6}\right[$ alors il existe un unique

$\alpha\in\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $g(\alpha)=0$ cad $f(\alpha)=\alpha$

2)montrons par récurrence que :

$\forall n\in\mathbb{N}$: $\frac{\pi}{6}\prec u_n\prec\frac{\pi}{2}$?

a) on a : $u_0\in\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$ donc vraie pour n=0

b)supposons que : $\frac{\pi}{6}\prec u_n\prec\frac{\pi}{2}$

c)montrons que : $\frac{\pi}{6}\prec u_{n+1}\prec\frac{\pi}{2}$

on a : $f'(x)=-\cos x\le 0$ sur $\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$ donc f est

décroissante sur $\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$ et on a : $\frac{\pi}{6}\prec u_n\prec\frac{\pi}{2}$

donc : $f\left(\frac{\pi}{2}\right)\prec f(u_n)\prec f\left(\frac{\pi}{6}\right)$

donc $\frac{\pi}{2}-1\prec u_{n+1}\prec\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$ et on a $\frac{\pi}{6}\prec\frac{\pi}{2}-1$et $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\prec\frac{\pi}{2}$

donc : $\frac{\pi}{6}\prec u_{n+1}\prec\frac{\pi}{2}$ finalement : $\forall n\in\mathbb{N}$: $\frac{\pi}{6}\prec u_n\prec\frac{\pi}{2}$

3)a)montrons que : $\forall x\in\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$ $\left|f'(x)\right|\le\frac{\sqrt{3}}{2}$?

$\forall x\in\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$ $f'(x)=-\cos x$ et puisque $x\to\cos x$

est décroissante sur $\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$ on a donc :

$\cos\frac{\pi}{2}\prec\cos x\le\cos\frac{\pi}{6}$ donc : $0\prec\cos x\le\frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc : $-\frac{\sqrt{3}}{2}\prec-\cos x\le 0\prec\frac{\sqrt{3}}{2}$

donc : $\forall x\in\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$ $\left|f'(x)\right|\le\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) déduire que : $|u_{n+1}-\alpha|\le\frac{\sqrt{3}}{2}|u_n-\alpha|$ $\forall n\in\mathbb{N}$?

puisque f est dérivable sur $\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$ alors f est dérivable et continue sur tout intervalle de la forme $[a;b]\subset\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$ donc Par application de I.A.F sur l'intervalle$[a;b]$ avec : $u_n=b$et $a=\alpha$

on trouve :$\left|f(u_n)-f(\alpha)\right|\le\frac{\sqrt{3}}{2}|u_n-\alpha|$ $\forall n\in\mathbb{N}$

donc : $|u_{n+1}-\alpha|\le\frac{\sqrt{3}}{2}|u_n-\alpha|$ $\forall n\in\mathbb{N}$

4) calculons : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$?

Montrons avant que : $|u_n-\alpha|\le\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n|u_0-\alpha|$

on a: $|u_0-\alpha|\le\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^0|u_0-\alpha|$ donc vraie pour n=0

b)supposons que : $|u_n-\alpha|\le\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n|u_0-\alpha|$

c)montrons que : $|u_{n+1}-\alpha|\le\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}|u_0-\alpha|$?

on a : $|u_n-\alpha|\le\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n|u_0-\alpha|$ et$|u_{n+1}-\alpha|\le\frac{\sqrt{3}}{2}|u_n-\alpha|$

donc : $|u_{n+1}-\alpha|\le\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n|u_0-\alpha|\le\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}|u_0-\alpha|$

donc : $|u_n-\alpha|\le\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n|u_0-\alpha|$ et puisque :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n=0$ car $-1\prec\frac{\sqrt{3}}{2}\prec1$ Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha$

Exercice6 : Soit f une fonction dérivable trois fois sur $[0;1]$ tel que : $f(1)=1$ et $f(0)=f'(0)=f'(1)=0$

Et soit le polynôme : $P(x)=x^2(-2x+3)$

1)calculer : $P(0)$; $P'(0)$; $P(1)$; $P'(1)$

2)on pose : $g(x)=f(x)-P(x)$

a) montrer qu'il existe $\alpha\in]0;1[$ tel que : $g^{(3)}(\alpha)=0$

b) en déduire qu'il existe $\alpha\in]0;1[$ tel que :

$f^{(3)}(\alpha)=-12$

Solution :1) $P(x)=x^2(-2x+3)$ et $P'(x)=-6x^2+6x$

Donc : $P(0)=P'(0)=P'(1)=0$ et $P(1)=1$

2) a) montrons qu'il existe $\alpha\in]0;1[$ tel que :

$g^{(3)}(\alpha)=0$?

puisque f et P sont dérivables trois fois sur $[0;1]$

donc $g=f-P$ est dérivable trois fois sur $[0;1]$

et par application du théorème de Rolle trois fois :

$g(0)=g(1)\Rightarrow\exists c_1\in]0;1[\,/\,g'(c_1)=0$ ($g^{(1)}(c_1)=0$)

$g^{(1)}(0)=f^{(1)}(0)-P^{(1)}(0)=0-0=0$

$g^{(1)}(c_1)=g^{(1)}(0)\Rightarrow\exists c_2\in]0;1[\,/\,g^{(2)}(c_2)=0$

$g^{(1)}(c_1)=g^{(1)}(1)\Rightarrow\exists c_3\in]0;1[\,/\,g^{(2)}(c_3)=0$

$g^{(2)}(c_2)=g^{(2)}(c_3)\Rightarrow\exists\alpha\in]c_2;c_3[\,/\,g^{(3)}(\alpha)=0$

Et puisque : $]c_2;c_3[\subset]0;1[$ donc :

$\exists\alpha\in]0;1[\,/\,g^{(3)}(\alpha)=0$

b) $\exists?\alpha\in]0;1[$ tel que : $f^{(3)}(\alpha)=-12$?

on a : $g(x)=f(x)+2x^3-3x^2$

$g'(x)=f'(x)+6x^2-6x$ donc : $g''(x)=f''(x)+12x$

donc : $g^{(3)}(x)=f^{(3)}(x)+12$ donc :

$g^{(3)}(\alpha)=f^{(3)}(\alpha)+12=0$

donc : $\exists\alpha\in]0;1[$ $f^{(3)}(\alpha)=-12$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien