Feuilles d'exercices : Convergence de suites

Exercice 1 (**)

Vrai ou faux ?

1. Une suite croissante à partir d'un certain rang est minorée.
2. Une suite convergente est nécessairement monotone à partir d'un certain rang.
3. Une suite divergeant vers $+\infty$ est nécessairement croissante à partir d'un certain rang.
4. Si (u_n) est croissante, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant v_n$, alors (v_n) est croissante.
5. Si $(|u_n|)$ converge, alors (u_n) aussi.
6. Si $(|u_n|)$ converge vers 0, alors (u_n) aussi.

Exercice 2 (* à **)

Étudier la convergence et déterminer la limite éventuelle de chacune des suites suivantes :

- $u_n = 2^n - 3^n + 4^n$
- $u_n = (-n+2)e^{-n}$
- $u_n = 2^n - e^{2n} + 1$
- $u_n = \dfrac{n^2 - 3n + 2}{2n^2 + 5n - 34}$
- $u_n = \ln n + e^{-3n}$
- $u_n = \dfrac{2\sqrt{n} + 3\ln n - 5}{\ln(n^3) - 3n + 2}$
- $u_n = \sqrt{n^2 - 1} - n$
- $u_n = \dfrac{(n+2)!}{(n^2+1) \times n!}$
- $u_n = e^{-\frac{1}{2n}} + \ln\left(\dfrac{n}{n+2}\right)$

Exercice 3 (**)

On considère une suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.

1. Montrer que tous les termes de la suite sont strictement positifs.
2. Déterminer la monotonie de la suite (u_n).
3. Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 \geqslant 2n + u_0^2$. En déduire la limite de la suite.

Exercice 4 (***)

On définit une suite (u_n) par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} k!$ (je rappelle que par convention $0! = 1$). Montrer à l'aide d'un encadrement que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n!} = 1$.

Exercice 5 (***)

On considère une suite (u_n) définie par $u_n = \left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^n$, avec $a \in \mathbb{R}_+$.

1. Montrer que la suite est croissante.
2. Montrer que, $\forall x \geqslant 0$, $\dfrac{t}{1+t} \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$.

3. En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{na}{n+a} \leqslant \ln u_n \leqslant a$.
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
5. Quel résultat obtient-on en prenant $a = 1$?

Exercice 6 (*)

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $0 < u_n \leqslant 1$, puis prouver que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

Exercice 7 (**)

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies de la façon suivante : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$, et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$. Montrer que ces deux suites sont adjacentes (les curieux seront contents d'apprendre que leur limite commune vaut $\dfrac{\pi^2}{6}$).

Exercice 8 (**)

On considère la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{n}{n^2+k}$.

1. Montrer que $\dfrac{n^2}{n^2+n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n^2}{n^2+1}$.
2. Déduire de l'encadrement précédent que la suite est convergente, et préciser sa limite.

Exercice 9 (***)

Soient a et b deux réels vérifiant $0 < a < b$. On définit deux suites de la façon suivante : $u_0 = a$; $v_0 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$.

1. Vérifier que ces deux suites sont bien définies.
2. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$ (pour une fois, pas besoin de récurrence).
3. Déterminer la monotonie de chacune des deux suites.
4. En déduire que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.
5. Écrire un programme Pascal permettant de calculer une valeur approchée de cette limite à ε près (ε étant choisi par l'utilisation). On utilisera une boucle WHILE ou REPEAT.

Exercice 10 (***)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a \neq 1$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 1}{u_n - 1}$.

1. Montrer que la suite est bien définie.
2. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$.
3. Étudier également le signe de $f(x) - x$.
4. On suppose $a > 1$. À l'aide des questions précédentes, montrer que $\forall n \geqslant 1$, $u_n \geqslant 2(1+\sqrt{2})$, puis que la suite est croissante. En déduire sa limite éventuelle.
5. Étudier de même la convergence de la suite quand $a < 1$.