

## Exercices d'applications et de réflexions sur les nombres complexes (Partie 1)

PROF : ATMANI NAJIB

2ème BAC Sciences maths

# TD : NOMBRES COMPLEXES

**Exercice 1 :** Trouver la forme algébrique et déterminer la parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants :

$$z_1 = (2+i)(-1+i) + (1+2i)^2 \quad z_2 = (1+i\sqrt{3})^3$$

$$z_3 = \frac{1-3i}{3-i} \quad z_4 = \frac{1+i}{3-2i} \quad z_5 = (1+i)^{10}$$

**Exercice 2 :** soient dans le plan complexe les points :  $A(1+i)$  et  $B\left(\frac{1}{2}+2i\right)$  et  $C(-1-i)$

Montrer que les les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont alignés.

**Exercice 3 :** soient dans le plan complexe les points :  $A(2;-3)$  et  $B(1;1)$  et  $C(1;2)$

1) Déterminer les affixes des points  $A$  et  $B$  et  $C$  ?

2) Déterminer l'affixe du vecteur  $\overrightarrow{AB}$

3) Déterminer l'affixe de  $I$ , milieu de  $[AB]$ .

4) Montrer que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés.

5) Déterminer le barycentre de  $\{(A, 2); (B, -1), (C, 3)\}$

6) Déterminer l'affixe du point  $D$  pour que le quadrilatère  $ABCD$  soit un parallélogramme.

**Exercice 4 :** soient dans le plan complexe les points :  $A$  ;  $B$  ;  $C$  ;  $D$  ;  $E$  d'affixes respectivement :

$$z_A = 1+i \text{ et } z_B = 3+2i \text{ et } z_C = 2-i \text{ et } z_D = -2i$$

$$\text{et } z_E = 2$$

1) Représenter ces points dans le plan complexe

2) Déterminer l'affixe de  $I$  milieu de  $[AB]$ .

3) Déterminer l'affixe du vecteur  $\overrightarrow{AB}$

4) Montrer que le quadrilatère  $ABCD$  est un parallélogramme

**Exercice 5 :** Démontrer que  $S = (1+i)^5 + (1-i)^5$  est un nombre réel.

**Exercice 6 :** on pose :  $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

et  $S = j^{2n} - j^n \quad n \in \mathbb{Z}$

1) Montrer que :  $j^2 = \bar{j}$

2) Démontrer que :  $S \in i\mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

**Exercice 7 :** soit  $u \in \mathbb{C}$  tel que  $u \notin \mathbb{R}$

Montrer que :  $(\forall z \in \mathbb{C}) |1+uz| = |1+\bar{u} \cdot z| \Rightarrow z \in \mathbb{R}$

**Exercice 8 :**  $z \in \mathbb{C}$

Ecrire en fonction de  $\bar{z}$  le conjugué des nombres complexes suivants :

$$1) Z_1 = (2+i)(5-i) \quad 2) Z_2 = 2z+5i \quad 3) Z_3 = \frac{z-1}{-3z+i}$$

**Exercice 9 :** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

$$1) 2z + i\bar{z} = 5 - 4i \quad 2) z = 2\bar{z} - 2 + 6i$$

**Exercice 10 :** dans le plan complexe on considère le nombre complexe  $U$  et soit  $M$  l'image du nombre complexe  $z$  et on pose :  $U = (z-2i)(\bar{z}-1)$

Et  $z = x + yi$  avec  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}$

1) écrire en fonction de  $x$  et  $y$  la partie réel et la partie imaginaire de  $U$

2) Déterminer l'ensemble  $(\Delta)$  des points  $M(z)$  du plan tels que :  $U$  est réel

3) Déterminer l'ensemble  $(C)$  des points  $M(z)$  tels que :  $U$  est imaginaire pur

**Exercice11 :**A) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

1)  $2z - 3\bar{z} + 1 + 2i = 0$       2)  $z + (1-i)\bar{z} + 3 - 2i = 0$

3)  $(3+i)z + \bar{z} = -i$

B) Déterminer les ensembles suivants :

1)  $(E1) = \{M(z) / \frac{z-2i}{z+i} \in \mathbb{R}\}$

2)  $(E2) = \{M(z) / \frac{z-2i}{z+i} \in i\mathbb{R}\}$

**Exercice12 :** Démontrer que :

$$S = (\sqrt{3} + i)^{2n+1} - (i - \sqrt{3})^{2n+1}$$
 est un nombre réel  $\forall n \in \mathbb{Z}$

**Exercice13 :** dans le plan complexe on considère le nombre complexe  $U$  et soit  $M$  l'image du nombre complexe  $z$  et on pose :  $U = 2iz - \bar{z}$ Et  $z = x + yi$  avec  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}$ 1) écrire en fonction de  $x$  et  $y$  la partie réel et la partie imaginaire de  $U$ 2) Déterminer l'ensemble  $(\Delta)$  des points  $M(z)$  du plan tels que :  $U$  est réel**Exercice 14 :** calculer le module des nombres

complexes suivants : 1)  $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$  2)  $z' = 3 - 4i$

**Exercice15 :**

A) Déterminer les modules des complexes suivants :

1)  $z_1 = 3 + \sqrt{3}i$       2)  $z_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{3}i$       3)  $z_3 = \frac{1}{1+i}$

4)  $z_4 = x$  où  $x \in \mathbb{R}$

B) Ecrire sous la forme algébrique les complexes suivants puis déterminer leurs modules :

1)  $u_1 = \frac{2+5i}{1+3i}$       2)  $u_2 = \frac{1+i}{i-3\sqrt{2}}$       3)  $u_3 = (2-\sqrt{3}i)(\sqrt{2}+i)$

C) Déterminer l'ensemble des points  $M(z)$ tels que :  $A(z)$  ;  $B(\bar{z})$  et  $C(\frac{1}{z})$  soit alignés.**Exercice16 :** calculer le module des nombres complexes suivants : 1)  $z_1 = 5(1+i\sqrt{3})$ 

2)  $z_2 = (1+i)(\sqrt{3}-i)$       3)  $z_3 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^3$

**Exercice17 :** Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  ; les points A, B et Cont pour affixes:  $z_A = 2$  et  $z_B = 1 + \sqrt{3}i$  et  $z_C = 3 + i\sqrt{3}$ 

Montrer que le triangle ABC est équilatéral

**Exercice18 :** Déterminer l'ensemble  $(\Delta)$  despoints M d'affixe  $z$  tels que :  $|z-1-2i| = |z-7+2i|$ **Exercice19:** Déterminer l'ensemble des points M d'affixe  $z$  tels que : a)  $|z-3+i| = 5$ 

b)  $|z-4-5i| = |z+2|$

**Exercice20 :** Déterminer l'ensemble  $(C)$  des pointsM d'affixe  $z$  tels que :  $|z-2i| = 3$ **Exercice21 :** Déterminer l'ensemble  $(\Delta)$  despoints M d'affixe  $z$  tels que :  $|iz+3| = \left|\frac{1}{i}z - 4i + 1\right|$ **Exercice22 :** Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  ;on considère les points A ; B ; C ; D ; E ; F qui ont pour affixes:  $z_A = 2$  et  $z_B = -2i$  et  $z_C = 2 + 2i$  et

$z_D = 3i$  et  $z_E = -3$  et  $z_F = -2 + 2i$

1) Représenter les points A ; B ; C ; D ; E ; F dans Le plan complexe

2) on utilisant la représentations déterminer

l'argument des complexe :  $z_A$  et  $z_B$  et  $z_C$  et  $z_D$  et

$z_E$  et  $z_F$

**Exercice23 :** Donner la forme trigonométrique du nombre complexe  $z$  dans les cas suivants :

1)  $z_1 = \sqrt{3} + i$     2)  $z_2 = 1 - i$     3)  $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}i$

4)  $z_3 = -1 - \sqrt{3}i$     5)  $z = 7$     6)  $z = -12$

**Exercice24:** Donner la forme trigonométrique du nombre complexe  $z$  dans les cas suivants avec

$\theta \in ]-\pi; \pi[ - \{0\}$

1)  $z_1 = \sin \theta + i \cos \theta$     2)  $z_2 = 1 - \cos \theta - i \sin \theta$

3)  $z_3 = \sin \theta + 2i \sin^2 \frac{\theta}{2}$

**Exercice25 :** on considère les nombres

complexes :  $z_1 = \sqrt{3} - i$  et  $z_2 = 1 - i$  et  $Z = \frac{z_1}{z_2}$  et

$U = z_1^6 \times z_2^2$

1) Ecrivez les nombres complexe  $z_1$  ;  $z_2$  et  $Z$  et

Sous leurs formes trigonométriques.

2) Ecrire le complexe  $Z$  Sous sa forme algébrique

puis en déduire  $\cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$

**Exercice26 :** Ecrire le complexe  $Z = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2} \right)^8$

Sous sa forme algébrique

**Exercice 27 :** Déterminer le module et l'argument du nombre complexe  $z$  dans les cas suivants :

1)  $z = \frac{3}{2} - i \frac{3\sqrt{3}}{2}$     2)  $z = -5 - 5i$     3)  $z = -6 + 6\sqrt{3}i$

4)  $z = (3 - 3i)^4$     5)  $z = -2 - 2\sqrt{3}i$     6)  $z = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$

7)  $z = (\sqrt{3} + 3i) \left( -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$     8)  $z = \frac{1}{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}$

9)  $z = \frac{-2 - 2\sqrt{3}i}{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}$

**Exercice28 :** Déterminer les racines carrées de

$z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

**Exercice29 :** Soit le complexe :

$u = (\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} + 1)$

1) Calculer  $u^2$  puis déterminer la forme trigonométrique de  $u^2$

2) En déduire la forme trigonométrique de  $u$

**Exercice30 :** Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  des points dans le plan complexe d'affixes respectifs  $z_A = 3 + 5i$ ,

$z_B = 3 - 5i$  et  $z_C = 7 + 3i$

1) montrer que :  $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = 2i$

2) montrer que  $ABC$  est un triangle rectangle et que :  $BC = 2AC$

**Exercice31 :** Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ;

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  des points dans le plan complexe

d'affixes respectifs  $a = 2i$ ,  $b = \sqrt{2}(1+i)$  et

$c = a + b$

1) Montrer que  $OBCA$  est un losange

2) Montrer que :  $\arg c \equiv \frac{3\pi}{8} [2\pi]$

**Exercice32 :** Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  des points dans le

plan complexe d'affixes respectifs  $a = 2 + i$ ,

$b = 3 + 2i$  et  $c = 5 - i$

Soit  $\alpha$  une mesure de l'angle orienté :  $(\overline{AB}; \overline{AC})$

Calculer  $\tan \alpha$

**Exercice33 :** On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé  $\mathcal{R}(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$  les points

$A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectifs :  $z_1 = -\sqrt{2}$  et  $z_2 = 1 + i$

et  $z_3 = 1 - i$

1) Placer dans le repère  $\mathcal{R}$  les points  $A$ ,  $B$  et  $C$

2) Déterminer le module et l'argument du nombre

complexe  $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$  et déterminer une mesure de

l'angle  $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB})$

3) Montrer que la droite  $(OA)$  est la médiatrice du segment  $[BC]$  et en déduire que :

$$(\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{8} [2\pi]$$

4) Ecrivez le nombre  $\frac{z_1 - z_2}{z_1}$  sous sa forme

algébrique puis en déduire  $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

**Exercice34** : 1° Vérifier que les points  $A(5+3i)$  ;  $B(2+i)$  et  $C(-1-i)$  sont alignés

2° Est ce que les points  $M(-2+2i)$ ,  $N(2-i)$  et  $N(1-i)$  sont alignés ?

**Exercice35** : Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que :

$$Z = \frac{5z - 2}{z - 1} \text{ Soit un imaginaire pur.}$$

**Exercices36** :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels

$$\text{que : } \left| \frac{z - 2}{z + 1 - i} \right| = 1$$

**Exercice37** : soit a et b et c des nombres

complexes tels que :  $|a| = |b| = |c| = 1$  et  $a \neq c$  et  $b \neq c$

$$1) \text{ Montrer que : } \left( \frac{c-b}{c-a} \right)^2 \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$$

$$2) \text{ en déduire que : } \arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) \equiv \frac{1}{2} \arg\left(\frac{b}{a}\right) \left[ \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) \equiv \frac{1}{2} \arg\left(\frac{b}{a}\right) \left[ \frac{\pi}{2} \right]$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et

exercices Que l'on devient un mathématicien



Bon courage