

TD : Structures algébriques (partie 1)

Lois de composition interne

Exercice1 : montrer on utilisant les tableaux de l'addition et de la multiplication dans

$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}\}$ que l'addition et la multiplication sont des lois de compositions internes

Exercice2 : on définit sur l'ensemble $] -1; 1[$ la

relation T tel que : $xTy = \frac{x+y}{1+xy}$; $\forall (x; y) \in] -1; 1[$

Monter que T est une loi de composition interne

Dans $] -1; 1[$

Exercice3 : on considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ calculer } A^2 \text{ et } A^3 \text{ et en déduire}$$

$$A^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Exercice4 : on muni \mathbb{R} d'une loi de composition interne $*$ définit par : $x * y = xy - 3x - 3y + 12$;

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et soit : } S =]3; +\infty[$$

Monter que S est une partie stable pour $(\mathbb{R}; *)$

Exercice5 : 1) on muni \mathbb{R} d'une loi de composition interne $*$ définit par : $a * b = a + b - 3ab$; $\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2$

Monter que $*$ est commutative et associative

2) on muni \mathbb{R}^2 d'une loi de composition interne T définit par :

$$(a; b)T(x; y) = (ax; ay + b) ; \forall (a; b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$$

Monter que T est ni commutative et ni associative dans \mathbb{R}^2

Exercice6 : on muni \mathbb{R} d'une loi de composition interne $*$ définit par : $a * b = ab - (a + b) + 2$;

$\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2$ 1) Monter que $*$ est commutative

2) Monter que $*$ admet un élément neutre et déterminer les éléments symétrisables

Exercice7 : on muni \mathbb{R} d'une loi de composition interne $*$ définit par : $x * y = xy - 4x - 4y + 20$;

$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$ 1) la loi $*$ est-elle commutative ?

2) la loi $*$ admet -elle un élément neutre et déterminer le s'il existe

3) déterminer les éléments symétrisables s'il existent

Exercice8 : on muni \mathbb{R} d'une loi de composition interne $*$ définit par : $x * y = x + 4y - 1$; $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$

1) la loi $*$ est-elle commutative ?

2) la loi $*$ admet -elle un élément neutre et déterminer le s'il existe

Exercice9 : on considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que : $A^2 - 2A + I_2 = 0$ et en déduire que

La matrice A est inversible et déterminer A^{-1}

2) calculer : B^2 et B^3 et en déduire que

La matrice B n'admet pas d'inverse

Exercice10 : on considère les matrices

$$\text{suyvantes : } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) calculer : A^2 et A^3 et en déduire que

2) Montrer que : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \forall n \in \mathbb{N}$

3) Montrer que : $(A - I_2)^2 = 0_2$ avec $0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

4) en déduire que La matrice A est inversible et déterminer A^{-1}

Exercice11 : on considère l'ensemble des matrices suivante :

$$E = \left\{ M_{(a;b)} = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix} / (a;b) \in \mathbb{Z}^2 \text{ et } a^2 - 2b^2 = 1 \right\}$$

Monter que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

Exercice12 : soit l'application : $f : (\mathbb{Z}; +) \rightarrow (\mathbb{Z}^*; \times)$
 $x \mapsto 5^x$

montrons que f est un morphisme de $(\mathbb{Z}, +)$

dans (\mathbb{Z}^*, \times)

Exercice13 : soit l'application : $g :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \ln x$

montrons que g est un morphisme de :

$(]0; +\infty[, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$

Exercice14: soit l'application : $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$
 $z \mapsto |z|$

montrons que h est un morphisme de :
 (\mathbb{C}, \times) dans (\mathbb{R}, \times)

Exercice15 : soit l'application :

$$k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^*$$

$$\theta \mapsto e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

montrons que k est un morphisme de : $(\mathbb{R}, +)$

dans (\mathbb{C}^*, \times)

$$l : \mathbb{R} \rightarrow M_2(\mathbb{R})$$

Exercice16 : soit l'application : $x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

montrons que l est un morphisme de : $(\mathbb{R}, +)$

dans $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

Exercice17: soit f l'application : $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
 $n \mapsto \overline{2^n}$

montrons que f est un morphisme de $(\mathbb{N}, +)$

dans $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \times)$

Exercice18 : on muni \mathbb{R}^2 de la loi de composition

interne suivante : $(a;b) + (a';b') = (a+a'; b+b')$;

$$\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \forall (a';b') \in \mathbb{R}^2$$

Soit $A(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ l'ensemble des applications affines :

$$A(\mathbb{R}; \mathbb{R}) = \{ f_{(a;b)} / \forall x \in \mathbb{R} : f_{(a;b)}(x) = ax + b \}$$

Soit l'application : $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow A(\mathbb{R}; \mathbb{R})$
 $(a;b) \mapsto f_{(a;b)}$

Montrer φ est un morphisme de $(\mathbb{R}^2, +)$

dans $(A(\mathbb{R}; \mathbb{R}), +)$

Exercice19 : soient $a \in]2; +\infty[$ et $b \in]2; +\infty[$

$$\text{On pose : } a * b = (a-2)(b-2) + 2$$

1) montrer que $*$ est une loi de composition interne

Dans $I =]2; +\infty[$

2) soit l'application définie sur \mathbb{R}^{**} vers I

$$\text{tel que : } f(x) = \frac{2x+1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^{**}$$

a) montrer que f est un morphisme de $(\mathbb{R}^{**}, \times)$

dans $(I, *)$

b) en déduire que $*$ est associative et admet un élément neutre a déterminer

Exercice20 : on muni \mathbb{R} d'une loi de composition interne $*$ définie par : $a * b = ab + (a^2 - 1)(b^2 - 1)$;

$\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2$ 1) Montrer que $*$ est commutative

2) Montrer que $*$ n'est pas associative

3) est ce que la loi $*$ admet un élément neutre ?

4) résoudre dans \mathbb{R} les équations :

a) $2 * x = 5$ b) $x * x = 1$

Exercice21 : on muni \mathbb{R}^2 de la loi de composition interne suivante : $(a; b) * (a'; b') = (a \times a'; b \times b')$;

$\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall (a'; b') \in \mathbb{R}^2$

1) Montrer que $*$ est commutative et associative

2) Montrer que $*$ admet un élément neutre et déterminer dans \mathbb{R}^2 les éléments symétrisables Pour la loi $*$

3) soit : $S = \mathbb{R} \times \{0\}$

a) montrer que S est une partie stable de $(\mathbb{R}^2, *)$

b) Montrer que $(S, *)$ admet un élément neutre et comparer les éléments neutres de $(\mathbb{R}^2, *)$

et de $(S, *)$

Exercice22 : on muni \mathbb{C} de la loi de composition interne T suivante : $zTz' = z\bar{z}'$; $\forall (z; z') \in \mathbb{C}^2$

$\forall (a'; b') \in \mathbb{R}^2$ (F, T) $\forall (z; z') \in \mathbb{C}^2$

1) étudier la commutativité et l'associativité de T

2) résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $(zTz)Tz = i$

Exercice23 : on muni $I =]0; +\infty[$ de la loi de composition interne $*$ suivante :

$$x * y = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \forall (x; y) \in I^2$$

soit f l'application définie sur I vers I

tel que : $f(x) = x^2 \quad \forall x \in I$

1) montrer que : $f(x * y) = f(x) + f(y)$

2) a) montrer que $*$ est associative

b) est ce que $*$ admet un élément neutre

3) soit $a \in I$ calculer : $A = \underbrace{a * a * \dots * a}_{n \text{ fois}} \quad n \in \mathbb{N}^*$

Exercice24 : 1) on muni \mathbb{R} d'une loi de composition interne $*$ définie par : $x * y = x + y - xy$; $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$

soit f l'application définie sur \mathbb{R} vers \mathbb{R}

tel que : $f(x) = 1 - x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

1) montrer que f est un homomorphisme bijectif

De $(\mathbb{R}; *)$ dans $(\mathbb{R}; \times)$

2) en déduire que $*$ est associative et que $*$ admet un élément neutre que l'on déterminera

3) déterminer l'ensemble des éléments symétrisables pour la loi $*$

4) soit $a \in \mathbb{R}$ calculer : $A = \underbrace{a * a * \dots * a}_{n \text{ fois}} \quad n \in \mathbb{N}^*$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

